Math. P.
361 m
Möbius

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

<36616403900013

<36616403900013

Bayer. Staatsbibliothek

Der barycentrische Calcul

ein neues Hülfsmittel

zur

analytischen Behandlung der Geometrie

dargestellt

und insbesondere

auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und die Entwickelung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte

angewendet

von

August Ferdinand Möbius

Professor der Astronomie zu Leipzig.

Mit vier Kupfertafeln.

Leipzig,

Verlag von Johann Ambrosius Barth.

1827.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Sr. Excellenz

dem

wirklichen Herrn Geheimen Rathe und Minister

Freyherrn von Lindenau

Vice - Landschafts - Director zu Altenburg, des Grossherzoglich Weimarischen Falkenordens Grosskreuz, des Königl. Sächs. Civil-Verdienst - Ordens Comthur, des Kaiserl. Russischen Wladimir- und des Königl. Preuss. Johanniter - Ordens Ritter

widmet diese Schrift

als Zeichen

seiner tiefsten und dankbarsten Verehrung

der Verfasser.

Vorrede.

Es ist bekannt, dass die der Mechanik zugehörige Lehre vom Schwerpunkte schon oftmals als Hülfsmittel zur Erfindung rein geometrischer Wahrheiten benutzt worden ist. Die frühesten Versuche sind unstreitig die mechanische Quadratur der Parabel von Archimedes und der schon in des Pappus mathematischen Sammlungen sich vorfindende, jetzt unter dem Namen der centrobaryschen oder Guldins Regel bekannte Satz. Mit Uebergehung späterer Bemühungen dieser Art, die, wie die eben gedachten, hauptsächlich die Quadratur und Cubatur von Flächen und Körpern zu ihrem Zwecke haben, erwähne ich nur aus den letzten Zeiten die Mathematiker Carnot und L'Huilier. Beide *) suchen den Schwerpunkt in das Gebiet der niedern Geometrie zu ziehen, indem sie nicht sowohl von Körpern, Flächen und Linien, als vielmehr bloss von einem Systeme gewichtiger Punkte den Schwerpunkt betrachten, ihn selbst aber, um alle Vorstellungen des Mechanischen zu besei-

*) Carnot in seiner *Géométrie de position,* L'Huilier in seinen *Elémens d'analyse géométrique et d'analyse algébrique.*

tigen, den Punkt der mittlern Entfernungen nennen, weil nämlich sein Abstand von irgend einer Ebene gleich der mittlern Entfernung aller Punkte des Systems von derselben Ebene ist. Die Bereicherungen, welche sie dadurch der Geometrie verschafft haben, sind allgemein anerkannt.

Von demselben elementaren und rein geometrischen Begriffe des Schwerpunkts gehen auch die vorliegenden Untersuchungen aus. Die erste Veranlassung hierzu war die Erwägung der Fruchtbarkeit des Satzes, dass jedes System gewichtiger Punkte nur einen Schwerpunkt hat, und dass daher, in welcher Folge man auch die Punkte nach und nach in Verbindung bringt, zuletzt doch immer ein und derselbe Punkt gefunden werden muss. Die einfache Art, womit ich dadurch, mehrere geometrische Sätze zu beweisen, mich im Stande sah, bewog mich, zu noch grösserer Vereinfachung solcher Untersuchungen einen dafür passenden Algorithmus auszumitteln.

Das Gleichgewicht, um mich der Sprache der Mechanik zu bedienen, drückte ich durch das Gleichheitszeichen aus, auf dessen eine Seite ich die Punkte des Systems mit ihren Gewichten, auf die andere Seite aber den Schwerpunkt des Systems mit einem Gewichte setzte, welches der Summe jener Gewichte gleich war. Das auf solche Weise dargestellte Gleichgewicht musste nun fortbestehen, wenn entweder alle Gewichte in gleichen Verhältnissen vergrössert oder verringert wurden, oder wenn Punkte mit ihren Gewichten von der einen auf die andere Seite mit dem entgegenge-

setzten Zeichen (d. h. in entgegengesetzter Richtung wirkend) gebracht, oder wenn endlich mit beiden Seiten neue in Gleichgewicht stehende Systeme verbunden wurden; Operationen, die, wie man sieht, den gewöhnlichen Verrichtungen der Algebra vollkommen analog waren.

Die Bemerkung, dass irgend dreien Punkten einer Ebene immer solche Gewichte beigelegt werden können, dass ein gegebener vierter Punkt der Ebene als Schwerpunkt derselben betrachtet werden kann, und dass diese drei Gewichte in Verhältnissen zu einander stehen, die aus der gegenseitigen Lage der vier Punkte nur auf eine Weise bestimmbar sind, führte mich weiter zu einer neuen Methode, die Lage von Punkten in einer Ebene zu bestimmen. Die drei Punkte, welche somit zur Bestimmung aller übrigen dienten, nannte ich Fundamentalpunkte, die sie verbindenden Geraden Fundam.linien, und das von ihnen gebildete Dreieck das F.dreieck; die Verhältnisse aber, die für den zu bestimmenden Punkt zwischen den Gewichten der F.punkte oder ihren Coëfficienten, wie ich die Gewichte von jetzt an hiess, statt finden müssen, waren die Coordinaten dieses Punktes. Auf ähnliche Art verfuhr ich zur Bestimmung eines Punktes im Raume, wo vier F.punkte nöthig waren, und es daher sechs F.linien und eine F.pyramide gab.

Die F.linien waren bei dieser Bestimmungsart offenbar dasselbe, was bei der gewöhnlichen Methode der parallelen Coordinaten die Axen sind. Jeder der F.punkte aber war einem Anfangspunkte

der Coordinaten analog, so dass folglich das F.-dreieck der Ebene oder die F.pyramide des Raums als die Vereinigung drei oder vier solcher Axensysteme anzusehen waren, dergleichen bei der gewöhnlichen Coordinatenmethode auf einmal nur eines berücksichtigt werden kann (§. 126.). Diese Vereinigung mehrerer Axensysteme konnte aber nicht anders als vortheilhaft seyn, da jedes neue Axensystem eine neue Ansicht der Figur gewährt und damit zu neuen Eigenschaften derselben hinführt. Auch gesellte sich noch zu diesem Vortheile die grosse Einfachheit, womit sich die Veränderung der anfangs gewählten F.punkte bewerkstelligen liess (§. 35.).

Ein Hauptgegenstand der analytischen Geometrie sind die Eigenschaften krummer Linien und Flächen. Um auch diese mit barycentrischer Rechnung behandeln zu können, war es nöthig, die Coëfficienten der F.punkte nicht mehr constant, sondern veränderlich zu nehmen. Waren die Coëfficienten der drei F.punkte einer Ebene oder der vier F.punkte des Raums Functionen einer veränderlichen Grösse, so bildeten alle die Schwerpunkte, die ich erhielt, indem ich der Veränderlichen nach und nach alle möglichen Werthe beilegte, eine Linie in der Ebene oder im Raume, und zwar eine gerade Linie, wenn die Coëfficienten lineäre Functionen der Veränderlichen, eine Linie der zweiten Ordnung, wenn sie quadratische Functionen waren, u. s. w. Einer nähern Betrachtung unterwarf ich die Linien der zweiten Ordnung oder die Kegelschnitte, und ich hoffe, dass die neuen analyti-

schen Ausdrücke für dieselben und die Art, wie daraus theils schon bekannte, theils mehrere neue Eigenschaften dieser Curven entwickelt worden sind, dem Leser nicht unangenehm seyn werden. Auch die Lehre von der Berührung und den merkwürdigen Punkten krummer Linien ist mit einiger Ausführlichkeit behandelt worden, die, wenn sie zu gross scheinen sollte, durch die Einfachheit, womit sich alle diese Gegenstände der barycentrischen Methode unterwerfen lassen, zu entschuldigen seyn möchte.

Wurden die Coëfficienten der vier F.punkte des Raums als Functionen zweier Veränderlichen genommen, so ergab sich der Ausdruck einer Fläche. Diese Fläche war eine Ebene bei Functionen von lineärer Form. Noch quadratische Glieder mussten in den Coëfficienten vorkommen, wenn die Fläche von der zweiten Ordnung seyn sollte, etc. Unter den dahin gehörigen Untersuchungen, erlaube ich mir, insbesondere auf den in §. 108. vorgetragenen Satz, die Berührung krummer Flächen mit Ebenen betreffend, und die in §. 109. daraus abgeleiteten Eigenschaften der Krümmungshalbmesser etc. aufmerksam zu machen *).

*) Wiewohl ich zu diesem Satze und den daraus zu ziehenden Folgerungen bei Anstellung eigener Untersuchungen gelangte, so fand ich doch später, kurz vor dem Drucke meines Buchs, dass schon Dupin denselben Satz, in Verbindung mit seiner sehr umfassenden Theorie der conjugirten Tangenten, aufgestellt hatte. Dupin *Développements de Géométrie.* Paris, 1813. Pag. 149. Da aber demungeachtet diese Behandlungsart der Berührung nicht allzubekannt seyn dürfte, so schien es mir passend, sie bei dieser

Das Bisherige ist ein kurzer Abriss einer analytischen Geometrie, wo statt der Methode der parallelen Coordinaten die baryc. Bestimmung durch F.punkte angewendet ist. Um die auf letzterem Wege erhaltenen Resultate mit denen, welche die erstere Methode giebt, vergleichen zu können, habe ich zum Schlusse des ersten Abschnitts den Zusammenhang zwischen beiden Methoden angegeben und gezeigt, wie man von dem barycentrischen Ausdrucke einer Curve oder Fläche zu ihrer Gleichung zwischen parallelen Coordinaten, und umgekehrt, übergehen kann.

Ein Umstand, der sich bei diesem wechselseitigen Uebergange insbesondere der Beachtung darbietet, besteht darin, dass sowohl in die gesuchte Gleichung als in die Coëfficienten des verlangten Ausdrucks die Coordinaten der F.punkte mit hineinkommen, während die Coëfficienten der

Gelegenheit, jedoch in der Form, wie ich sie noch vor der Bekanntschaft mit Dupin's Werke abgefasst, hier mitzutheilen.

Mit diesen Eigenschaften der Berührung hängen auch die Beiwörter elliptisch und hyperbolisch genau zusammen, wodurch ich die beiden Hyperboloide, (welche nebst dem Ellipsoid die drei Hauptarten von Flächen der zweiten Ordnung ausmachen,) unterschieden habe. Das elliptische Hyperboloid wird nämlich, eben so wie das ellipt. Paraboloid, von einer Ebene, welche mit einer berührenden Ebene parallel ist, in einer Ellipse, und das hyperbolische Hyperboloid, eben so wie das hyperbolische Paraboloid, von einer solchen Ebene in einer Hyperbel geschnitten. Doch muss ich hinzufügen, dass ich zu diesen ganz sachgemässen Benennungen, statt welcher ich früher andere gebraucht hatte, erst durch Dupin veranlasst worden bin. *Dével. de Géom.* pag. 50.

bisher behandelten Ausdrücke von diesen Coordinaten ganz unabhängig waren, und dabei allerdings auch alle durch diese Coordinaten ausdrückbaren Grössen, wie z. B. die Verhältnisse zwischen den gegenseitigen Abständen der F.punkte, die von den F.linien gebildeten Winkel etc. gar nicht in Rechnung kommen konnten. Wiewohl ich nun hierdurch hätte veranlasst werden können, durch Einführung jener Coordinaten oder von ihnen abhängiger Grössen, den baryc. Calcul auf alle Arten geometrischer Untersuchungen anzuwenden, so sah ich doch bald, dass man alsdann oft eine verwickeltere Rechnung haben würde, als beim Gebrauche der gewöhnlichen Coordinatenmethode; da hingegen alle durch den baryc. Calcul zu erhaltenden Resultate, wobei die gegenseitige Lage der F.punkte nicht berücksichtigt wird, meistentheils leichter auf diese Weise, als mit Anwendung paralleler Coordinaten, gefunden werden können.

Hiernach liess ich also den baryc. Calcul in seiner Unabhängigkeit von der Lage der F.punkte, wo er nur auf eine gewisse Classe von Untersuchungen anwendbar ist, auf Untersuchungen aber, die zum Ersatz dieser Beschränktheit an sich selbst von desto allgemeinerer Natur sind. Denkt man sich nämlich alle Punkte einer Figur durch die Coëfficienten gewisser F.punkte gegeben, so werden alle durch diese Coëfficienten ausdrückbaren Relationen auch bei jeder andern Figur vorhanden seyn, die man mit denselben Coëfficienten, aber nach Belieben anders gewählten F.punkten, construirt. Man sieht augenblicklich, dass zwei sol-

che Figuren einander nicht ähnlich sind, sondern in einer allgemeinern Beziehung zu einander stehen. Es ergab sich mir, dass diese Beziehung einerlei sey mit derjenigen, welche von Euler in seiner *Introductio* Affinität genannt wird *).

Zugleich aber wurde ich dadurch bewogen, noch mehrere dergleichen Beziehungen zwischen Figuren auszumitteln, und somit entstand der zweite Abschnitt meines Buchs, welcher von den geometrischen Verwandtschaften handelt, einer Lehre, welche in dem hier gebrauchten Sinne die Grundlage der ganzen Geometrie in sich fasst, die aber auch eine der schwierigsten seyn möchte, wenn sie in völliger Allgemeinheit und erschöpfend vorgetragen werden soll. Im Gegenwärtigen sind nur die einfachsten Arten der Verwandtschaften betrachtet worden, diejenigen nämlich, welche auch in der niedern Geometrie in Anwendung kommen können.

Der Hauptnutzen dieser der niedern Geometrie angehörigen Verwandtschaften besteht aber darin, dass jede derselben zu einer besondern Classe von Aufgaben hinführt, wo aus gewissen in hinreichender Anzahl gegebenen Stücken einer Figur ein oder mehrere andere Stücke gefunden werden sollen. — Von diesen Aufgaben scheint man bisher

*) In Bezug auf das in §. 147. darüber Gesagte können noch verglichen werden Kästner's *Anfangsgr. d. Anal. endl. Grössen.* 3te Aufl. S. 248, wo Kästner durch Euler's unrichtige Ansicht verführt, von der Affinität überhaupt keinen grossen Nutzen sehen will.

bloss diejenigen gekannt zu haben, welche aus der Gleichheit und Aehnlichkeit, als der einfachsten Verwandtschaft, ihren Ursprung ziehen, und wonach bei einem Systeme von n Punkten in einer Ebene oder im Raume aus $2n-3$ oder $3n-6$ von einander unabhängigen Stücken alle übrigen sich finden lassen; der bekannte Grundsatz der Trigonometrie, Polygonometrie und Polyedrometrie. Die Aufgaben, zu denen die Aehnlichkeit allein führt, sind hiervon nicht wesentlich unterschieden. Wohl aber gelangt man zu Aufgaben ganz anderer Art durch die Affinität und durch die Gleichheit, welche letztere eine eben so specielle Art von der Affinität ist, als die Gleichheit und Aehnlichkeit von der Aehnlichkeit allein. Noch andere Aufgaben endlich bietet die noch allgemeinere Verwandtschaft der Collineation dar. Die Darstellung dieser verschiedenen Classen von Aufgaben und die Lösung der neuen unter ihnen *) mittelst des baryc. Calculs ist der Hauptgegenstand des zweiten Abschnitts und zugleich

*) Zwei dergleichen Aufgaben, die eine aus der Gleichheit, die andere aus der Coll.verwandtschaft entsprungen, hatte ich meinen i. J. 1823 herausgegebenen *Beobachtungen auf der Königl. Univers. Sternwarte zu Leipzig* als Anhang beigefügt. Zwei Lösungen der erstern (§. 165. 2.), vom Hrn. Hofrath und Ritter Gauss und von Hrn. Clausen in Altona, befinden sich in Schumacher's *Astron. Nachrichten* No. 42.; nachträgliche Erinnerungen von mir über dieselbe Aufgabe, — insbesondere, dass man zu derselben Endgleichung gelangt, wenn man statt der 5 Dreiecke die 5 Vierecke gegeben annimmt, welche die Dreiecke zum Fünfeck ergänzen, — stehen in No. 56. derselben Zeitschrift.

dasjenige in meinem Buche, was ich der Beachtung des Lesers am meisten empfehlen möchte.

Zu der letzterwähnten Verwandtschaft der Collineation wurde ich durch die Betrachtung der perspectivischen Abbildung einer ebenen Figur geleitet. Bekanntlich hat man die Theorie der perspectivischen Projectionen schon oft angewendet, um schwierigere Sätze und Aufgaben der Geometrie auf einfachere zurückzuführen *). Hier suchte ich den Gegenstand aus einem noch allgemeinern Gesichtspunkte darzustellen, und die Verwandtschaft, welche zwischen einer ebenen Figur und ihrem perspectivischen Bilde statt findet, auch auf Figuren im Raume auszudehnen. Es lässt sich nämlich nicht nur bei ebenen, sondern auch bei räumlichen Figuren der Begriff dieser Verwandtschaft schon dadurch bestimmen, dass jeden drei Punkten einer Geraden der einen Figur drei gleichfalls in einer Geraden liegende Punkte der andern entsprechen. Und diese Erklärungsart ist es auch, wonach die Verwandtschaft ihren Namen erhalten hat. Ich legte ihr denselben bei auf den Rath meines sehr geschätzten Freundes, des hiesigen Hrn. Professor Weiske, dem ich auch für noch einige andere hier vorkommende Benennungen Dank schuldig bin.

Eine andere Definition, die sich für die Collin.verwandtschaft aufstellen lässt, beruht auf der Gleichheit einer gewissen Art zusammengesetzter

*) Dahin gehört unter andern Neuton's *Genesis Curvarum per umbras*, und die Aufgabe desselben Geometers: *Figuras in alias ejusdem generis figuras mutare. Philos. natur. Princ.* lib. I. lemma 22.

Verhältnisse, hier Doppelschnittsverhältnisse genannt. Die bis jetzt, so viel ich weiss, noch nicht behandelte Theorie dieser Verhältnisse ist in einem besondern Capitel vorgetragen. Um aber den Zusammenhang dieser zweiten Definition mit der ersten in gehöriges Licht zu stellen, waren noch andere Untersuchungen vorauszuschicken nöthig, die in dem Capitel von den geometrischen Netzen zusammengefasst sind.

Mit der Theorie der Collin.verwandtschaft steht auch die Lehre in enger Verbindung, zu der mich eine bekannte Eigenschaft der Kegelschnitte hinführte, und wonach jedem Punkte in der Ebene einer solchen Curve eine Gerade, und umgekehrt, entpricht. Noch ehe ich aber diese Lehre und einige Anwendungen derselben dem Drucke übergeben hatte, belehrte ich mich*), dass derselbe Gegenstand in grosser Allgemeinheit bereits von französischen Mathematikern behandelt worden sey. Ohne eine nähere Nachricht darüber erhalten zu können, habe ich es in dem letzten Capitel meines Buchs versucht, jene Lehre mit Hülfe des baryc. Calculs in derselben Allgemeinheit vorzutragen, zugleich aber die mit den hierher gehörigen Eigenschaften in Verbindung stehende Theorie der Doppelschnitts- und Vieleckschn.verhältnisse zu benutzen, um dadurch jener Lehre, so wie auch der letztern Theorie selbst, eine noch grössere Ausdehnung zu verschaffen.

*) Durch die Anzeige der Gergonne'schen Annalen, Tom. XVI. No. 7, in Férussac's *Bulletin des sciences mathem.* etc. Février 1826, p. 112—116.

Möge das Gesagte zur Uebersicht des Ganges und der Beschaffenheit der vorliegenden Untersuchungen hinreichen. Ich bemerke nur noch, dass ich das schon von Mehrern gebrauchte Verfahren, nach welchem der positive oder negative Werth einer Linie durch die verschiedene Nebeneinanderstellung der die Endpunkte der Linie bezeichnenden Buchstaben ausgedrückt wird, hier durchgehends angewendet und auch auf die Bezeichnung des Inhalts von Dreiecken, (Vielecken, in d. Amerk. zu §. 165.) und dreiseitigen Pyramiden erweitert habe. Es wird hierdurch, so wie auch zum Theil durch den baryc. Calcul selbst, die Anschaulichkeit der synthetischen Methode mit der Allgemeinheit der analytischen in möglichst nahe Verbindung gebracht, indem man mit Anwendung rein geometrischer Zeichen, dergleichen die für die Punkte einer Figur gewählten Buchstaben sind, die arithmetischen Beziehungen zwischen den Theilen der Figur durch Formeln darstellt, welche für alle möglichen Lagen der Theile Gültigkeit haben.

Die weitere Ausführung hiervon, so wie noch einiger anderer Gegenstände des Buchs, verspare ich auf eine künftige Gelegenheit, und wünsche für jetzt, meine Absicht, durch die hier dargelegten Methoden und Lehrsätze der Geometrie zur Vereinfachung ihrer Untersuchungen und zur Erweiterung ihres Umfangs einigermassen beizutragen, auch nach dem billigen Urtheile Anderer in etwas erreicht zu haben.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Darstellung des barycentrischen Calculs und einer darauf gegründeten analytischen Geometrie. S. 1—178.

Erstes Capitel.

Vom Schwerpunkte. S. 3—15.

§. 1. Wie mit der Bezeichnung eines Theils einer Linie durch zwei an die Endpunkte des Theils gesetzte Buchstaben zugleich der positive oder negative Werth dieses Theils auszudrücken ist. — §. 2—8. Erklärung des Schwerpunkts in rein geometrischem Sinne. Den Schwerpunkt eines Systems von gegebenen Punkten mit gegebenen Gewichten oder Coëfficienten zu finden. — §. 9. Untersuchung des speciellen Falles, wenn die Summe der Coëfficienten $=0$, und, §. 10., wenn überdies einer der Punkte der Schwerpunkt der übrigen ist. — §. 11—12. Mehrere Folgerungen.

Zweites Capitel.

Der barycentrische Calcul. S. 16—31.

§. 13—14. Abkürzung der im vorigen Capitel erhaltenen Formeln, woraus der baryc. Calcul entspringt. — §. 15. Grundregeln dieses Calculs. — §. 16. Nothwendigkeit von Formeln, welche zum Uebergange von der Figur zur Rechnung und umgekehrt dienen. — §. 17. Mit der Bezeichnung eines Dreiecks durch drei an die Spitzen gesetzte Buchstaben soll zugleich der positive oder negative Werth des Dreiecks ausgedrückt werden. — §. 18. Allgemeine dabei statt findende Relationen. — §. 19—20. Dasselbe in Bezug auf dreiseitige Pyramiden. — §. 21—27. Lehrsätze zur Anwendung des barycentr. Calculs.

Drittes Capitel.

Neue Methode, die Lage von Punkten zu bestimmen. S. 32—44.

§. 28. Allgemeine Beschaffenheit dieser Methode. — §. 29—30. Bestimmung eines Punktes in einer geraden Linie durch zwei Fundamentalpunkte. — §. 31—32. Bestimmung eines Punktes in einer Ebene mittelst dreier Fund.punkte. Fund.linien, Fund.dreieck. Doppelte Art, wie vier Punkte in einer Ebene gegen einander liegen können. — §. 33—34. Bestimmung eines Punktes im Raume durch vier F.punkte. F.ebenen, F.pyramide. Doppelte Art der Lage von fünf Punkten im Raume. — §. 35. Veränderung der F.punkte. — §. 36. Beispiel.

Viertes Capitel.

Von Ausdrücken gerader Linien und Ebenen. S. 44—69.

§. 37. Einfachster Ausdruck einer Geraden. — Ausdrücke gerader Linien in einer Ebene. — §. 38. Allgemeiner Ausdruck einer solchen Linie. — §. 39. Durchschnitte derselben mit den F.linien. Ausdruck des unendl. entfernten Punktes der Linie. — §. 40. Vereinfachung des allgemeinen Ausdrucks einer Geraden. — §. 41—43. Aufgaben, den Schneidepunkt zweier Linien, die Bedingungsgleichung für ihren Parallelismus, etc. betreffend. — § 44. Ausdrücke für einige besondere Lagen einer Geraden gegen das F.dreieck. — Ausdrücke gerader Linien im Raume überhaupt. — §. 45. Allgemeiner Ausdruck einer solchen. — §. 46. Durchschnitte derselben mit den vier F.ebenen. Ausdruck des unendl. entfernten Punktes der Linie. — §. 47. Vereinfachung des allgemeinen Ausdrucks der Linie. — §. 48. Bedingungsgleichung, wenn zwei Gerade in einer Ebene liegen, und darin einander parallel sind. — Ausdrücke für Ebenen. — §. 49. Allgemeiner Ausdruck einer Ebene. — §. 50. Durchschn.punkte der Ebene mit den F.linien. Durchschn.linien mit den F.ebenen. — §. 51. Vereinfachung des allgem. Ausdrucks einer Ebene. — §. 52. Ausdruck für eine unendl. entfernte Linie einer Ebene. — §. 53—55. Aufgaben, die Durchschnitte von Ebenen unter sich und mit Geraden, etc. betreffend. — §. 56. Ausdrücke gerader Linien u. Ebenen in einigen speciellen Lagen gegen die F.pyramide.

Fünftes Capitel.

Von Ausdrücken krummer Linien in Ebenen. S. 69—86.

§. 57. Was unter dem Ausdrucke einer Curve zu verstehen ist. — §. 58. Beschaffenheit der hier zu untersuchenden Curvenausdrücke. — §. 59. Allgemeiner Ausdruck für die Linien der zweiten Ordnung. — §. 60. Vereinfachung dieses Ausdrucks durch Einführung einer andern Veränderlichen. — §. 61. Vereinfachung durch Annahme anderer F.-punkte. — §. 62. Von den drei wesentlich verschiedenen Formen der Linien der zweiten Ordnung. — §. 63. Wie die Lage einer Curve gegen das F.dreieck aus der Beschaffenheit der Coëfficienten erkannt wird. —

§. 64. Ausdrücke für Linien der zweiten Ordnung in einigen merkwürdigen Lagen gegen das F.dreieck. — §. 65. Einfache Construction einer Linie der 2ten Ordnung. Merkwürdiger von Maclaurin und Braikenridge entdeckter Satz. — §. 66. Ausdrücke für Linien höherer Ordnungen. — §. 67. Die Ordnung einer Curve bleibt bei Aenderung der F.punkte dieselbe. — §. 68. Die Anzahl der Durchschnitte einer Curve mit einer Geraden kann die Ordnungszahl der Curve nicht übersteigen. — §. 69. Verminderung der Zahl der Constanten im allgemeinen Ausdrucke einer Curve durch Einführung einer andern Veränderlichen. — §. 70. Bestimmung einer Curve durch gegebene Punkte. — §. 71. Verwandlung des Ausdrucks einer Curve in eine nach den Potenzen der Veränderlichen fortlaufende Reihe. Hieraus abgeleitete Construction einer Curve von beliebiger Ordnung durch blosses Ziehen von Geraden.

Sechstes Capitel.

Von der Berührung, den merkwürdigen Punkten und unendlichen Aesten krummer Linien in Ebenen. S. 87—114.

§. 72. Zweck der in diesem Capitel enthaltenen Untersuchungen. — §. 73—76. Bestimmung von Linien, welche mit einer gegebenen Curve in einem gegebenen Punkte eine Berührung von der 1sten, 2ten, etc. Ordnung bilden. — §. 77. Allgemeiner Ausdruck der geradlinigen Tangente. Die Berührung einer Curve mit einer Geraden ist im Allgemeinen von der ersten Ordnung. — §. 78. Ausnahmen hiervon bei merkwürdigen Punkten. Wendungspunkt. — §. 79. Spitze der ersten Art. — §. 80. Spitze der zweiten Art. — §. 81. Allgemeine Form des Ausdrucks bei merkwürdigen Punkten. — §. 82. Allgemeinere Bedingungen für das Vorhandenseyn merkwürdiger Punkte. — §. 83—87. Andere Behandlungsart derselben Gegenstände, indem die Berührung durch das Zusammenfallen anfänglicher Schneidepunkte zweier Linien erklärt wird. — §. 88. Von doppelten, dreifachen, etc. Punkten einer Curve. Isolirte Punkte. — Von den unendlichen Aesten. — §. 89. Unendliche Aeste sind vorhanden, wenn die Coëfficientensumme = o werden kann. — §. 90—91. Bestimmung einfacherer Linien, welche sich einer gegebenen asymptotisch nähern. — §. 92. Fälle, den merkwürdigen Punkten analog, in denen die unendlichen Aeste einer Curve gegen die geradlinige Asymptote eine besondere Lage haben. — §. 93. Fall, wo die Aeste keine Gerade, sondern eine Parabel zur Asymptote haben. — §. 94. Allgemeine Resultate.

Siebentes Capitel.

Von Ausdrücken krummer Linien im Raume. S. 114—124.

§. 95. Eintheilung dieser Linien in Ordnungen. Eine Linie der *n*ten Ordnung kann von einer Ebene in höchstens *n* Punkten getroffen werden. — §. 96. Verwandlung des Ausdrucks einer Linie im Raume in eine nach den Potenzen der Veränderlichen fortgehende Reihe. — §. 97. Von der Berührung krummer Linien im Raume. — §. 98. Allgemeiner

Ausdruck der geradlinigen Tangente und der Krümmungsebene. Anwendung hiervon auf die Linien der dritten Ordnung. — §. 99. Doppelte Krümmung bei Linien im Raume; worin sie besteht. Merkwürdige Punkte bei Linien von doppelter Krümmung. Einfacher, doppelter Wendungspunkt. — §. 100. Von der Ebene, welche durch einen unendlichen Ast und die ihm im Unendlichen parallel laufende Asymptote bestimmt wird.

Achtes Capitel.

Von Ausdrücken für krumme Flächen. S. 125—151.

§. 101. Allgemeine Beschaffenheit dieser Ausdrücke. — §. 102. Eintheilung der Flächen in Ordnungen. — §. 103. Lage einer Fläche gegen die F.pyramide. — Von der Berührung der Flächen. §. 104. Gang der Untersuchung. — §. 105. Ausdruck der eine Fläche berührenden Ebene. — §. 106. Allgemeiner Ausdruck einer Fläche, wenn sie von einer der F.ebenen in einem der F.punkte berührt wird. — §. 107. Doppelte Beschaffenheit der Berührung einer Fläche mit einer Ebene. — §. 108. Betrachtung der berührenden Ebene in der nächstfolgenden Lage, wo sie die Fläche zu schneiden anfängt. Dieser Schnitt ist im Allgemeinen ein Kegelschnitt. — §. 109. Einfache und anschauliche Art, wie hiermit die bekannten Eigenschaften des Krümmungshalbmessers und unendlich naher Normalen einer krummen Fläche dargestellt werden können. — Von den Flächen der zweiten Ordnung. §. 110. Von den verschiedenen Arten dieser Flächen. — §. 111. Vereinfachung des Ausdrucks für das hyperbolische Hyperboloid. Eigenschaften dieser Fläche. — §. 112. Vom hyperbol. Paraboloid. — Von abwickelbaren Flächen. §. 113. Allgemeiner Ausdruck einer Fläche, welche durch die Bewegung einer Geraden erzeugt wird. — §. 114. Allgemeiner Ausdruck einer abwickelbaren Fläche, als einer besondern Art der vorigen. — §. 115—116. Noch andere Ausdrücke dieser Fläche, aus geometrischen Betrachtungen hergeleitet. — §. 117. Analytischer Zusammenhang zwischen diesen Ausdrücken.

Neuntes Capitel.

Verwandlung barycentrischer Ausdrücke in Gleichungen zwischen parallelen Coordinaten und umgekehrt. S. 152—178.

§. 118—119. Bestimmung eines barycentrisch ausgedrückten Punktes durch parallele Coordinaten. — §. 120—125. Das umgekehrte Problem. — §. 126. Einfachste Gestalt der hierbei nöthigen Formeln. — §. 127. Ueber die grössere Allgemeinheit, in welcher hier die Bestimmung durch parallele Coordinaten genommen wird. — §. 128. Erweitertes Gebiet der barycentr. Untersuchungen, wenn man die Verhältnisse zwischen den gegenseitigen Abständen der F.punkte mit berücksichtigt. — §. 129. Den Ausdruck einer ebenen Curve in eine Gleichung, und umgekehrt, zu verwandeln. — §. 130. Beispiele. — §. 131. Dieselbe Aufgabe für Curven im Raume. — §. 132. Beispiele. — §. 133. Dieselbe Auf-

gabe für Flächen. — §. 134. Beispiele. — §. 135 — 137. Zusammenhang zwischen rationalen Ausdrücken und Gleichungen. Jeder rationale Ausdruck einer ebenen Curve lässt sich in eine Gleichung verwandeln, die mit dem Ausdrucke von einerlei Ordnung ist, nicht umgekehrt. — §. 138. Anzahl der Bedingungsgleichungen, bei welchen die zwei Veränderlichen einer algebraischen Gleichung als rationale Functionen einer dritten Veränderlichen dargestellt werden können.

Zweiter Abschnitt.

Von den Verwandtschaften der Figuren und den daraus entspringenden Classen geometrischer Aufgaben. S. 179 — 368.

Erstes Capitel.

Von der Gleichheit und Aehnlichkeit. S. 181 — 187.

§. 139. Erklärung der Gleichheit und Aehnlichkeit. — §. 140. Construction eines Systems von Punkten, welches einem gegebenen Systeme gleich und ähnlich ist. Anmerkung über Figuren im Raume, welche einander gleich und ähnlich sind, aber nicht zur Congruenz gebracht werden können. — §. 141. Beweis jener Construction. Anzahl von Stücken, welche bei einem Systeme von n Punkten gegeben seyn müssen, um daraus alle übrigen Stücke finden zu können.

Zweites Capitel.

Von der Aehnlichkeit. S. 187 — 190.

§. 142. Erklärung der Aehnlichkeit. — §. 143. Construction ähnlicher Figuren. Anzahl der Verhältnisse, aus denen bei einem Systeme von n Punkten alle übrigen Verhältnisse gefunden werden können. Allgemeine Bemerkung über den Zusammenhang zwischen Construction und Rechnung.

Drittes Capitel.

Von der Affinität. S. 191 — 212.

§. 144. Wie der Begriff der Affinität aus der barycentr. Bestimmung von Punkten entspringt. — §. 145. Erklärung der Affinität ebener Figuren durch Proportionalität zwischen sich entsprechenden Flächentheilen. — §. 146. Andere Erklärung mittelst paralleler Coordinaten. — §. 147. Von der Affinität hat schon Euler gehandelt. — §. 148. Widerlegung einer Euler'schen Behauptung. — §. 149. Noch andere Erklärung affiner Figuren in Ebenen. — §. 150 — 153. Analoge Erklärungen und Eigenschaften affiner Figuren im Raume. — §. 154. Die Affinität bei Systemen von Punkten in geraden Linien ist einerlei mit der Aehnlichkeit. — §. 155 — 156. Construction affiner Figuren in Ebenen. Anzahl von Verhältnissen zwischen Flächentheilen, welche bei einer ebenen geradlinigen Figur gegeben seyn müssen, um daraus alle übrigen

Verhältnisse dieser Art finden zu können. Zur Lösung der hieraus entspringenden Aufgaben dient der barycentrische Calcul. — §. 157. Beispiele. — §. 158—160. Analoge Aufgaben bei räumlichen Figuren.

Viertes Capitel.

Von der Gleichheit. S. 213—242.

§. 161—162. Engere Bedeutung, in welcher hier die Gleichheit der Figuren genommen wird. Entstehung des Begriffs der Gleichheit aus dem der Affinität. — §. 163. Gegenseitiges Verhalten der bisher erklärten Verwandtschaften. — §. 164. Construction gleicher Figuren in Ebenen. Anzahl der Flächentheile, aus welchen sich bei einer ebenen geradlinigen Figur die übrigen Flächentheile ihrem Inhalte nach finden lassen. — §. 165. Beispiele. Erklärung des Flächeninhalts eines Vielecks, auch auf Vielecke mit Doppelpunkten anwendbar. — §. 166. Merkwürdige Relation zwischen den Dreiecken eines durch Diagonalen getheilten Fünfecks, wodurch alle hierher gehörigen Aufgaben in Rechnung sich setzen lassen. — §. 167. Construction gleicher Figuren im Raume. — §. 168. Aus wie viel körperlichen Theilen bei einem durch Ebenen verbundenen Systeme von Punkten die übrigen körperl. Theile gefunden werden können. — §. 169. Beispiel. — §. 170—171. Zwei Relationen zwischen Pyramiden, analog der Relation zwischen Dreiecken in §. 166. — Von der Affinität und Gleichheit krummer Linien und Flächen. §. 172. Allgemeine Beziehungen zwischen affinen Curven. — §. 173. Alle Kegelschnitte von derselben Art sind einander affin. Je zwei Parabeln lassen sich auch als gleiche Figuren betrachten. — §. 174. Folgerungen aus dieser Eigenthümlichkeit der Parabel. Allgemeine Eigenschaften unendlich kleiner Segmente einer Curve. — §. 175. Affinität und Gleichheit krummer Flächen überhaupt. — §. 176. Je zwei Flächen der zweiten Ordnung von derselben Art sind einander affin. Paraboloide von derselben Art können auch als gleich angesehen werden. — §. 177—178. Beweis dieses Satzes für das hyperb. Paraboloid und Folgerungen daraus. Cubatur dieses Paraboloids. — §. 179. Beweis für das ellipt. Paraboloid. Cubatur desselben. Anmerkung über unendlich kleine Segmente krummer Flächen überhaupt.

Fünftes Capitel.

Die Doppelschnittsverhältnisse. S. 243—265.

§. 180. Vorerinnerung. — §. 181. Betrachtung des Verhältnisses, nach welchem eine Gerade von bestimmter Länge in einem Punkte geschnitten wird. — §. 182. Doppelschn.verhältnisse. Werthe derselben nach der verschiedenen Lage der vier sie bestimmenden Punkte. — §. 183. Abgekürzte Bezeichnung der D.verhältnisse. — §. 184. Relationen zwischen den D.verhältnissen, welche durch Permutation der vier Buchstaben in ihrer Bezeichnung entstehen. Tafel dafür. — Relationen zwischen D.verhältnissen bei einem Systeme von mehr als vier Punkten in einer geraden Linie. — §. 185. Grund-

formeln. — §. 186. Einfache Anwendungen. — §. 187. Aus wie viel D.verhältnissen bei einem Systeme von n Punkten in einer geraden Linie die übrigen gefunden werden können. — D.verhältnisse bei einem Systeme gerader Linien in einer Ebene. — §. 188—189. D.verhältnisse bei vier Geraden, welche sich in einem Punkte schneiden. — §. 190. Relationen zwischen D.verhältnissen bei einem Systeme von fünf Punkten, — §. 191., bei einem Systeme von fünf Geraden in einer Ebene. — §. 192. Aus wie viel D.verhältnissen bei einem Systeme n gerader Linien in einer Ebene etc. — D.verhältnisse bei einem Systeme von Ebenen. — §. 193. Allgemeine Betrachtung eines Systems sich schneidender Ebenen. — §. 194. Aus wie viel D.verhältnissen bei einem Systeme von n Ebenen etc. — §. 195. Zweckgemässere Bezeichnung der D.verhältnisse in den hierbei anzuwendenden Formeln. — §. 196. D.verhältnisse bei vier Ebenen, welche sich in einer Geraden schneiden. — §. 197. Beispiel zu §. 194.

Sechstes Capitel.

Die geometrischen Netze. S. 266—301.

Das Netz in einer Ebene. §. 198. Vier Punkte in einer Ebene werden durch Gerade verbunden. Eigenschaften dieser Figur. Harmonische Theilung. — §. 199. Zusätze. — §. 200. Durch die ohne Ende fortgesetzte Verbindung der Durchschnittspunkte dieser Figur wird die Ebene mit einem immer dichter werdenden Netze überzogen. — §. 201—205. Allgemeine Eigenschaften des Netzes. Jedes von Punkten des Netzes gebildete D.verhältniss ist rational; Punkte des Netzes können an allen Stellen der Ebene gefunden werden; etc. — Das Netz im Raume. §. 206. Figur, welche entsteht, wenn fünf Punkte im Raume zu dreien durch Ebenen verbunden werden. — §. 207—208. Eigenschaften dieser Figur auf rein geometrischem Wege gefunden. Hiermit können rückwärts die Eigenschaften der Figur in §. 198. ohne Anwendung von Calcul oder Proportionen dargethan werden. — §. 209. Barycentr. Entwickelung der Eigenschaften dieses Systems von Ebenen. — §. 210. Durch fortgesetzte Verbindung je dreier Punkte dieses Systems mit Ebenen entsteht das Netz im Raume. — §. 211—214. Allgemeine Eigenschaften desselben, analog den obigen für das Netz in einer Ebene. — §. 215—216. Von Vieleckschnittsverhältnissen. Entstehung der Vl.verhältnisse. Jedes aus Netzpunkten gebildete Vl.verhältniss ist rational. Ein D.verhältniss ist ein Zweieckschn.verhältniss.

Siebentes Capitel.

Von der Verwandtschaft der Collineation. S. 301—330.

§. 217. Einfachste Erklärung dieser Verwandtschaft durch die gerade Linie. — §. 218. Die hiernach sich entsprechenden Punkte zweier Ebenen können durch Construction zweier Netze gefunden werden. — §. 219. Barycentr. Erklärung der Coll. Verw. bei ebenen Figuren. — §. 220. Zusätze. Alle Kegelschn. sind einander collinear. — §. 221. Gleich-

heit der D.- und Vl.verhältnisse zwischen sich entsprechenden Punkten coll.verwandter ebener Figuren. — §. 222. Erörterung der Coll. Verw. bei räumlichen Figuren durch Construction von Netzen im Raume. — §. 223. Barycentr. Erklär. der Coll. Verw. bei räuml. Figuren. — §. 224. Zusätze. Die Flächen der zweiten Ordnung sind nicht insgesammt einander collinear, sondern zerfallen in dieser Hinsicht in zwei Classen. — §. 225. Gleichheit der D.- und Vl.verhältnisse bei collinearen Figuren im Raume. — §. 226. Coll. Verwandtschaft bei Systemen von Punkten in geraden Linien. — Construction collinear verwandter Figuren. §. 227 — 228. Construction, wenn die gegebene Figur bloss aus Punkten in einer Geraden besteht. — §. 229. Dieselbe Aufgabe bei ebenen Figuren. — §. 230. Die Ebenen zweier collinearer Figuren können immer und auf unzählige Weisen in eine solche gegenseitige Lage gebracht werden, dass die Geraden, welche je zwei sich entspr. Punkte verbinden, sich in Einem Punkte schneiden. — §. 231. Construction coll. verw. Figuren im Raume. — §. 232. Beweis der vorgetragenen Constructionen, etc.

Achtes Capitel.

Von den aus der Verwandtschaft der Collineation entspringenden Aufgaben. S. 331 — 368.

§. 233 — 234. Wie viel D.- und Vl.verhältnisse bei einem Systeme von *n* Punkten gegeben seyn müssen, um daraus die übrigen finden zu können. — Der abgekürzte barycentrische Calcul. §. 235. Gegenstände, die sich diesem Calcul unterwerfen lassen. — §. 236. Abkürzung der baryc. Gleichungen bei einem Systeme von Punkten in einer Geraden. — §. 237. Berechnung der D.- und Vl.verhältnisse. — §. 238. Aus in hinreichender Anzahl gegebenen D.- und Vl.verhältnissen bei Punkten in einer Geraden die übrigen zu finden. Beispiel. — §. 239—242. Formeln des abgekürzten Calculs und Regeln für deren Anwendung bei ebenen Figuren. — §. 243. Beispiele. Merkwürdige Relationen bei in einander beschriebenen Dreiecken und Vierecken. — §. 244. Anwendung des abgekürzten Calculs auf räumliche Figuren. — §. 245—246. Beispiel. Eine Gerade zu ziehen, welche vier andere gegebene Gerade schneidet. Allgemeine Auflösung durch Construction eines hyperb. Hyperboloids. Auflösung durch Rechnung für eine besondere Lage der gegebenen Geraden. — Schlussbemerkungen. §. 247. Uebersicht der Arten von Aufgaben, welche aus den bisher erklärten Verwandtschaften entspringen. — §. 248. Eintheilung aller Eigenschaften der Figuren in drei Classen.

Dritter Abschnitt.

Anwendung des barycentrischen Calculs auf die Entwickelung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte. S. 369—454.

Erstes Capitel.

Bestimmung eines Kegelschnitts durch gegebene Punkte. S. 371—385.

§. 249. Vereinfachung des Ausdrucks für einen Kegelschnitt, welcher durch die drei F.punkte geht. — §. 250. Ausdruck eines durch fünf Punkte beschriebenen Kegelschnitts. — §. 251. Ein Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts kann gegen denselben drei verschiedene Arten von Lagen haben. Bedingungen dafür. — §. 252. Ausdruck einer durch die F.punkte beschriebenen Parabel. — §. 253—254. Durch vier Punkte einer Ebene können immer Hyperbeln, nicht aber auch immer Ellipsen und Parabeln beschrieben werden. — §. 255. Bestimmung der Art des Kegelschnitts, welcher sich durch fünf gegebene Punkte führen lässt. — §. 256. Zusätze. Unendlich grössere Wahrscheinlichkeit, dass fünf Punkte in einer Hyperbel, als dass sie in einer Ellipse liegen. — §. 257. Anderer Beweis des Satzes in §. 255.

Zweites Capitel.

Bestimmung eines Kegelschnitts durch gegebene Tangenten. S. 386—401.

§. 258. Vereinfachung des Ausdrucks für einen Kegelschnitt, der von den drei F.linien berührt wird. — §. 259. Ausdruck einer davon berührten Parabel. — §. 260. Bestimmung der Art eines Kegelschnitts, wenn drei Tangenten und in zweien derselben die Berührungspunkte gegeben sind. — §. 261. Ausdruck eines an fünf Gerade beschriebenen Kegelschnitts. — §. 262. Merkwürdige Sätze bei einer von drei Geraden berührten Parabel. — §. 263. Dreifache Art der Lage einer Geraden gegen einen Kegelschnitt. Bedingungen dafür. — §. 264. Bestimmung der Art des Kegelschnitts, der an fünf gegebene Gerade beschrieben werden kann. — §. 265. Besondere Eigenschaft einer um eine Fläche der zweiten Ordnung beschriebenen dreiseitigen Pyramide.

Drittes Capitel.

Von den Durchmessern und dem Mittelpunkte eines Kegelschnitts und den Asymptoten der Hyperbel. S. 402—413.

§. 266—268. Eigenschaften der Durchmesser und des Mittelpunkts eines Kegelschnitts. — §. 269. Construction von Kegelschnitten in in einander beschriebene Dreiecke, wobei die Mittelpunkte der Kegelschnitte in einer Geraden liegen. — §. 270—271. Eigenschaften der Asymptoten der Hyperbel.

Viertes Capitel.

Gegenseitiges Entsprechen zwischen Punkten und geraden Linien in Bezug auf einen Kegelschnitt. S. 413—433.

§. 272. Eigenschaften von Sehnen eines Kegelschnitts, welche sich in Einem Punkte schneiden. — §. 273. Jedem Punkte in der Ebene eines Kegelschnitts entspricht in Bezug auf letztern eine gewisse Gerade, und umgekehrt. — §. 274—275. Gegenseitige Lage dieser Punkte und Geraden. — §. 276. Anwendung dieser Theorie, um aus schon bekannten Eigenschaften der Kegelschnitte neue, analoge abzuleiten. Beispiele. In und um einen Kegelschnitt beschriebene Vierecke. — Eigenschaften in und um einen Kegelschnitt beschriebener Sechsecke. — §. 277—280. Das einbeschriebene Sechseck. Beschreibung eines Kegelschnitts durch fünf Punkte. — §. 281. Rückkehr zu Eigenschaften der Vierecke. Ein- und umschriebenes Achteck. — §. 282. Das umschriebene Sechseck. Beschreibung eines Kegelschnitts an fünf gegebene Gerade. — §. 283. Um (In) zwei um (in) einen Kegelschnitt beschriebene Dreiecke lässt sich ein zweiter Kegelschnitt beschreiben. — §. 284. Gegenseitiges Entsprechen zwischen den Punkten und Tangenten zweier Kegelschnitte.

Fünftes Capitel.

Allgemeinere Darstellung des gegenseitigen Entsprechens zwischen Punkten und geraden Linien. S. 433—454.

§. 285. Auch bei bloss geradlinigen Figuren können durch das Vertauschen der Punkte mit Geraden und der Geraden mit Punkten aus gegebenen Sätzen analoge abgeleitet werden. — §. 286. Analytischer Beweis dafür. Gegenseitige Beziehung, in welche bei zwei Ebenen alle Punkte der einen mit den Geraden der andern sich setzen lassen. — §. 287. Jeder Curve der einen Ebene gehört alsdann eine Curve in der andern zu, so dass wechselseitig den Punkten der einen Curve die Tangenten der andern entsprechen. — §. 288—289. Die vier ersten Paare sich entsprechender Punkte und Linien können bei dieser Beziehungsart nach Willkühr genommen werden. — §. 290. Hierbei statt findende Gleichheit der D.verhältnisse. — §. 291—294. Merkwürdige Art, wie auch dieselben Vl.verhältnisse in der entsprechenden Figur sich wieder zeigen. — §. 295. Folgerungen daraus. — §. 296. Erfindung analoger Sätze in Bezug auf Vl.verhältnisse. — §. 297. Beispiele. — §. 298. Alle Eigenschaften der dritten Classe sind paarweise vorhanden.

Erster Abschnitt.

Darstellung
des
barycentrischen Calculs
und
einer darauf gegründeten
analytischen Geometrie.

Erstes Capitel.

Vom Schwerpunkte.

§. 1. Vorerinnerung. Die Bezeichnung eines Theils einer geraden Linie durch Nebeneinanderstellung der zwei Buchstaben, womit man die Endpunkte desselben benannt hat, soll hier nicht allein als Ausdruck für den absoluten Werth des Theils gebraucht werden, sondern zugleich durch die verschiedene Stellung der Buchstaben angeben, ob dieser Werth, nach der einmal festgesetzten positiven Richtung der Linie, als positiv oder negativ zu betrachten ist.

Ein Punkt kann sich nämlich in einer geraden Linie nach zwei verschiedenen Richtungen bewegen, von denen die eine der andern entgegengesetzt ist. Die eine dieser Richtungen heisse die positive, die andere die negative. Sind nun A und B beliebige zwei Punkte einer geraden Linie, so verstehe man unter dem Ausdrucke AB den Werth des zwischen A und B enthaltenen Theils der Linie, positiv oder negativ genommen, je nachdem ein in der Linie fortgehender Punkt, um von dem, in dem Ausdrucke zuerst gesetzten, Punkte A zu dem nachfolgenden B zu gelangen, sich in der positiven oder negativen Richtung bewegen muss.

Hiernach ist also immer: $AB + BA = 0$; und wenn C einen dritten Punkt derselben Geraden bedeutet, mag

dieser dritte Punkt zwischen A und B, oder ausserhalb, auf der Seite von A oder der Seite von B liegen:

I. $BC + CA + AB = o$,

II. $CB - CA = AB$, u. s. w.

Bei zwei verschiedenen geraden Linien ist die positive Richtung der einen von der der andern im Allgemeinen ganz unabhängig. Sind sich aber die Linien parallel, so wollen wir, nach Festsetzung der positiven Richtung der einen, die der andern so bestimmen, dass, wenn die andere parallel mit sich fortbewegt wird, bis sie mit der erstern Linie zusammenfällt, sie dann beide auch hinsichtlich der positiven Richtung identisch sind.

Sind daher A, B, C, D die vier auf einander folgenden Spitzen eines Parallelogramms, so hat man $AB = DC$ und $BC = AD$, dagegen $AB + CD = o$ und $BC + DA = o$. — Ist ferner P (Fig. 1.) der Durchschnitt der zwei Geraden AB und $A'B'$, und laufen AA' und BB' einander parallel, so verhält sich immer $AP : BP = AA' : BB'$, mögen die zwei Parallelen AA' und BB' auf einerlei oder verschiedenen Seiten des Punktes P liegen, nur dass im erstern Falle die Exponenten der beiden Verhältnisse positiv, im letztern negativ sind.

§. 2. **Aufgabe.** Durch zwei gegebene Punkte A und B (Fig. 1.) sind zwei Parallellinien AA' und BB' gezogen. Bezeichnen ferner a und b zwei Zahlen, die in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen, deren Summe aber nicht Null ist. Es wird verlangt, die zwei Parallelen durch eine dritte Gerade so zu schneiden, dass, wenn A' und B' die resp. Durchschnittspunkte sind,

$$a . AA' + b . BB' = o$$

ist.

Auflösung. Man ziehe die Gerade AB, und theile dieselbe in P dergestalt, dass $AP : PB = b : a$, so wird jede durch P gehende und die Parallelen schneidende Gerade, wie $A'PB'$, und keine andere, die geforderte Eigenschaft haben.

Denn wegen der ähnlichen Dreiecke $AA'P$, $BB'P$ verhält sich:

$$AA' : BB' = AP : BP = AP : -PB = b : -a;$$

folglich ist $a.AA' + b.BB' = 0$, wie verlangt wurde.

Es kann aber auch keine andere, durch P nicht gehende Gerade die Parallelen auf die verlangte Weise schneiden. Denn sey $A''B''$ eine solche Gerade, welche den Parallelen in A'' und B'' begegne. Man lege durch P mit $A''B''$ eine Parallele $A'B'$, welche die Parallelen AA' und BB' in A' und B' schneide, und mit AA', BB' eine Parallele PP'', welche $A''B''$ in P'' treffe, so ist $A'A'' = B'B'' = PP''$, folglich $a.A'A'' + b.B'B'' = (a+b)PP''$. Es ist aber nach dem eben Erwiesenen: $a.AA' + b.BB' = 0$, mithin $a(AA' + A'A'') + b(BB' + B'B'') = (a+b)PP''$, d. i. $a.AA'' + b.BB'' = (a+b)PP''$, also nicht $= 0$.

§. 3. Zusätze. *a.* Was von einer, die Parallelen schneidenden, geraden Linie bewiesen worden, gilt offenbar auch von einer sie schneidenden Ebene. Jede durch P gelegte Ebene und keine andere wird die zwei Parallelen so schneiden, dass, wenn A' und B' die Durchschnittspunkte sind, $a.AA' + b.BB' = 0$ ist. Geht aber eine Ebene nicht durch P und trifft sie die durch P mit AA', BB' gezogene Parallele in P'' und AA', BB' in A'', B'', so ist immer: $a.AA'' + b.BB'' = (a+b)PP''$.

b. Die Lage des Punktes P ist blos von der Lage der Punkte A und B, mit denen er in gerader Linie ent-

halten ist, und von dem Verhältnisse $a : b$ abhängig, keineswegs aber von dem Winkel, den die Parallelen durch A und B mit AB machen. Haben a und b einerlei Vorzeichen, so muss einerlei Vorzeichen auch den ihnen proportionalen BP und PA zukommen; P liegt dann folglich zwischen A und B, näher dem A oder dem B, nach dem $a > b$ oder $b > a$. Für $a = b$ ist P der Mittelpunkt von AB. Sind a und b mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet, so müssen es auch BP und PA seyn, folglich PB und PA einerlei Vorzeichen haben. In diesem Falle liegt daher P ausserhalb AB, und zwar auf der Seite von A oder der Seite von B, nachdem PB oder PA der grössere von beiden Abständen, d. h. nachdem absolut $a > b$ oder $b > a$ ist. Auch hier also liegt P demjenigen der beiden Punkte A und B näher, welcher den absolut grösseren Coëfficienten hat.

c. Denkt man sich in A und B Gewichte angebracht, welche den Zahlen a und b proportional sind, so ist P der Schwerpunkt dieses Systems. Heisse daher auch gegenwärtig P der Schwerpunkt der Punkte A und B mit den resp. Coëfficienten a und b.

§. 4. Aufgabe. Drei Parallelen AA', BB', CC', (Fig. 2.), welche durch drei gegebene Punkte A, B, C gehen, — mögen die Parallelen in der Ebene ABC selbst enthalten seyn, oder nicht, — durch eine Ebene so zu schneiden, dass, wenn A', B', C' die resp. Schneidungspunkte, und a, b, c in gegebenen Verhältnissen zu einander stehende Zahlen bezeichnen, welche nicht Null zur Summe haben,

$$a.AA' + b.BB' + c.CC' = 0$$

ist.

Auflösung. 1) Man verbinde beliebige zwei der drei gegebenen Punkte, z. B. A und B durch eine Ge-

rade, und theile diese in P dergestalt, dass $BP : PA = a : b$, dass folglich P der Schwerpunkt von A und B mit den resp. Coëfficienten a und b ist.

2) Man ziehe PC und nehme darin den Punkt Q so, dass $CQ : QP = a + b : c$, dass mithin Q der Schwerpunkt von P und C mit den resp. Coëfficienten $a + b$ und c ist.

Jede durch den Punkt Q gelegte Ebene, und keine andere, wird alsdann der Aufgabe Genüge leisten.

Um dieses zu beweisen ziehe man noch durch P eine Parallele PP' mit den Parallelen AA', BB', CC'. Schneide nun irgend eine durch Q gelegte Ebene die Parallelen durch A, B, C, P in A', B', C', P', so ist, nach §. 3. $a.$, wegen 1): $a.AA' + b.BB' = (a+b).PP'$, und wegen 2): $(a+b).PP' + c.CC' = 0$, folglich:
$a.AA' + b.BB' + c.CC' = 0$.

Dass aber jede andere nicht durch Q gehende Ebene die Forderung der Aufgabe nicht erfülle, wird so bewiesen. Schneide eine solche Ebene die Parallelen durch A, B, C, P in A'', B'', C'', P'', und eine noch durch Q gezogene Parallele in Q'', so ist wegen 1): $a.AA'' + b.BB'' = (a+b).PP''$, und wegen 2): $(a+b).PP'' + c.CC'' = (a+b+c).QQ''$; folglich $a.AA'' + b.BB'' + c.CC'' = (a+b+c)\, QQ''$, also nicht $= 0$.

§. 5. Zusätze. $a.$ Der Punkt Q ist mit den drei gegebenen Punkten A, B, C in einer und derselben Ebene enthalten, und seine Lage darin blos von der Lage der Punkte A, B, C und den Verhältnissen ihrer Coëfficienten $a : b : c$ abhängig, nicht aber von der Lage der Parallelen gegen die Ebene, und eben so wenig von der Wahl der beiden Punkte, mit denen man den Anfang der Construction macht. Denn könnte durch eine andere Wahl auch ein anderer Punkt gefunden werden, so

müssten alle Ebenen, welche durch diesen und nicht zugleich durch Q gehen, der Aufgabe ebenfalls Genüge leisten, was gegen das Erwiesene streitet.

b. Bringt man in A, B und C Gewichte an, die sich wie $a:b:c$ verhalten, so zeigt die Mechanik, dass Q der Schwerpunkt dieses Systems ist. Heisse demnach auch gegenwärtig Q der Schwerpunkt von A, B und C mit den resp. Coëfficienten a, b und c.

§. 6. Aufgabe. Durch vier gegebene Punkte A, B, C und D, (Fig. 3.) — mögen dieselben in einer Ebene liegen oder nicht, — sind vier Parallelen nach einer beliebigen Richtung gezogen. Es wird verlangt, diese Parallelen durch eine Ebene so zu schneiden, dass, wenn A', B', C', D' die resp. Durchschnittspunkte und a, b, c, d Coëfficienten bezeichnen, die in gegebenen Verhältnissen zu einander stehen, und nicht Null zur Summe haben,

$$a.AA'+b.BB'+c.CC'+d.DD'=0$$

ist.

Auflösung. 1) Man suche von irgend zweien der gegebenen Punkte mit ihren resp. Coëfficienten, z. B. von A mit dem Coëfficienten a und B mit dem Coëfficienten b, den Schwerpunkt, welcher P sey.

2) Von P mit dem Coëfficienten $a+b$ und den beiden übrigen Punkten C und D mit ihren Coëfficienten c und d suche man nach Anleitung der vorigen Aufgabe wiederum den Schwerpunkt.

Sey dieser Q, so wird jede durch Q gelegte Ebene und keine andere die verlangte Eigenschaft haben.

Denn schneide eine solche Ebene die Parallelen durch A, B, C, D und eine noch durch P gezogene Parallele in A', B', C', D' und P', so ist wegen 1): $a.AA'+b.BB'=(a+b).PP'$, und wegen 2): $(a+b).PP'+c.CC'+d.DD'=0$, folglich $a.AA'+b.BB'+c.CC'+d.DD'=0$.

Schneide ferner eine andere nicht durch Q gehende Ebene die vorigen Parallelen in A'', B'', C'', D'', P'', und eine noch durch Q gezogene in Q'', so ist wegen 1): $a.AA'' + b.BB'' = (a+b).PP''$, und wegen 2): $(a+b).PP'' + c.CC'' + d.DD'' = (a+b+c+d).QQ''$, folglich $a.AA'' + b.BB'' + c.CC'' + d.DD''$ $= (a+b+c+d)\ QQ''$, also nicht $= 0$.

§. 7. Zusatz. Heisse der so gefundene Punkt Q, aus demselben Grunde wie bei den vorigen Aufgaben, der Schwerpunkt der Punkte A, B, C, D mit den resp. Coëfficienten a, b, c, d. Er ist eben so wenig, wie dort, von der Lage der Parallelen und von der Folge, in welcher man die vier Punkte nach und nach in Betrachtung zieht, abhängig.

§. 8. So wie in den bisherigen Aufgaben von zwei zu drei und von drei zu vier gegebenen Punkten übergegangen wurde, lässt sich nun weiter von vier zu fünf Punkten u. s. w. fortgehen, und somit im Allgemeinen folgender Satz erweisen.

Ist eine beliebige Anzahl $= \nu$ von Punkten A, B, $C \ldots N$ mit resp. Coëfficienten a, b, $c \ldots n$ gegeben, deren Summe nicht $= 0$ ist, so kann immer ein Punkt S, und nur einer, — der Schwerpunkt — von der Beschaffenheit gefunden werden, dass, wenn man durch die gegebenen Punkte und den Punkt S nach einer beliebigen Richtung Parallelen zieht, und diese mit einer willkührlich gelegten Ebene schneidet, welches resp. in A', B', C', $\ldots N'$, S' geschehe, dass dann immer

$$a.AA' + b.BB' + c.CC' + \ldots + n.NN'$$
$$= (a+b+c+\ldots+n)\ SS',$$

und folglich, wenn die Ebene durch S selbst geht,

$$a.AA'+b.BB'+c.CC'+\ldots+n.NN'=0 \text{ ist.}$$

Um diesen Satz sogleich in seiner Allgemeinheit darzuthun, suche man nach §. 2. von beliebigen zweien der gegebenen Punkte, z. B. von A und B mit ihren Coëfficienten a und b, den Schwerpunkt. Heisse dieser P, und eine durch ihn gezogene Parallele schneide die beliebig gelegte Ebene in P', so ist $a.AA'+b.BB'=(a+b).PP'$, und folglich

$$a.AA'+b.BB'+c.CC'+\ldots+n.NN'$$
$$=(a+b).PP'+c.CC'+\ldots+n.NN'.$$

Auf diese Weise ist das gegebene System von ν Punkten mit ihren Coëfficienten auf ein anderes von $\nu-1$ Punkten $P, C, \ldots N$ mit den Coëfficienten $a+b, c, \ldots n$ zurückgebracht, bei welchem die Summe der Coëfficienten $(a+b)+c+\ldots+n$ und die Summe der Producte aus den Coëfficienten in die Abschnitte der Parallelen, der Summe der Coëfficienten und der Summe der Producte im ersten Systeme gleich sind. Eben so lässt sich dieses zweite System von $\nu-1$ Punkten in ein drittes von $\nu-2$ Punkten umwandeln, und so ferner, bis man endlich nach $\nu-1$ solchen Umwandlungen auf einen einzigen Punkt S kommt, bei dem der Coëfficient und das Product aus diesem Coëfficienten in den dem S zugehörigen Abschnitt SS', der Summe der Coëfficienten und der Summe der Producte in dem ursprünglich gegebenen Systeme gleich sind.

Dass es übrigens nur Einen Punkt dieser Art geben kann, und folglich immer derselbe Punkt gefunden werden muss, in welcher Folge man auch die gegebenen Punkte verbindet, erhellet schon daraus, weil, wenn

noch ein anderer Punkt Σ dieselbe Eigenschaft besässe, für jede durch Σ gelegte Ebene, also auch für eine solche, welche nicht durch S geht, $a.AA' + \ldots + n.NN' = o$ seyn müsste. Dieses widerspricht aber dem Vorigen, weil für eine solche Ebene, wenn sie eine Parallele durch S in S' schneidet, $a.AA' + \ldots + n.NN' = (a + \ldots + n)\ SS'$, also nicht $= o$ ist.

§. 9. Es wurde bisher angenommen, dass die Summe der den gegebenen Punkten zugehörigen Coëfficienten nicht $= o$ sey. Ist sie aber dieses, so ersieht man sogleich, dass ein solches System keinen construirbaren Schwerpunkt haben kann, indem sonst, wegen $a.AA' + b.BB' + \ldots = (a + b + \ldots = o).SS'$, auch durch jede andere, nicht durch S gehende Ebene die Forderung der Aufgabe, $a.AA' + b.BB' + \ldots = o$, erfüllt würde, welches im Allgemeinen, d. h. für jedwede Lage der gegebenen Punkte, gar nicht möglich ist. Es macht daher dieser specielle Fall eine besondere Untersuchung nothwendig.

Seyen also die Punkte $A, B, C..N$ mit ihren resp. Coëfficienten $a, b, c..n$, deren Summe $a + b + c + .. + n = o$ sey, gegeben, so kann nicht auch $b + c + .. + n = o$ seyn, weil sonst $a = o$ seyn müsste, und in diesem Falle der Punkt A als gar nicht vorhanden zu betrachten wäre. Von den Punkten $B, C..N$ mit ihren Coëfficienten $b, c..n$ wird sich daher auf die in §. 8. gelehrte Weise der Schwerpunkt finden lassen. Sey dieser T, und irgend eine Ebene schneide die durch $A, B..N, T$ gezogenen Parallelen in $A', B'..N', T'$, so ist $b.BB' + .. + n.NN' = (b + .. + n).TT' = -a.TT'$. Hierdurch wird $a.AA' + b.BB' + .. + n.NN' = a.AA' - a.TT'$, und unsere Aufgabe kömmt somit darauf hinaus, die Ebene so zu legen, dass $a.AA' - a.TT' = o$, d. h.

$AA' = TT'$ ist. Wegen des Parallelismus der Linien AA', TT' thut aber dieser Bedingung jede Ebene Genüge, welche mit der Geraden AT parallel geht, und keine andere.

Ist also bei einem gegebenen Systeme von Punkten die Summe der Coëfficienten $= 0$, so kann man es immer auf zwei Punkte reduciren, — wenn es anders nicht blos aus zwei Punkten besteht, — und für jede Ebene, welche mit der, diese zwei Punkte verbindenden, Geraden parallel geht, und für keine andere, ist die Summe der Producte $a.AA' + \ldots = 0$. Der eine dieser zwei Punkte war vorhin einer der gegebenen Punkte selbst, — auch kann man dafür begreiflich den Schwerpunkt von mehreren derselben nehmen, — der andere ist der Schwerpunkt der übrigen. Es lassen sich daher immer, wenn die Anzahl der gegebenen Punkte grösser als zwei ist, mehrere Paare solcher Punkte finden. Allein die, jedes dieser Paare verbindenden, Geraden sind sämmtlich mit einander parallel, weil es sonst Ebenen gäbe, die nicht einer und derselben Geraden parallel wären, und dennoch zugleich die Forderung der Aufgabe erfüllten.

Der Definition des Schwerpunktes gemäss, als eines solchen, in welchem sich alle, unserer Aufgabe Genüge leistende Ebenen schneiden, und weil Parallelen als Linien anzusehen sind, die sich erst in unendlicher Entfernung schneiden, können wir daher auch sagen: der Schwerpunkt liegt in dem Falle, wenn die Summe der Coëfficienten $= 0$ ist, unendlich entfernt, nach einer Richtung, die durch die letzt gefundenen Parallelen bestimmt wird.

§. 10. Indessen findet bei diesem speciellen Falle eine Ausnahme statt. Denn gesetzt, der Schwerpunkt T der Punkte $B, C..N$ ergäbe sich identisch mit dem Punkte

A selbt, so würde auch TT' identisch mit AA', und die Summe $a.AA' + b.BB' + .. + n.NN'$ immer $= o$ seyn, wie man auch die Ebene legen möchte. Wenn also bei einem Systeme von Punkten mit ihren Coëfficienten die Summe der letztern $= o$, und überdies einer der Punkte der Schwerpunkt der übrigen ist, so erfüllt jedwede Ebene die Forderung, oder mit andern Worten, ein solches System hat gar keinen Schwerpunkt.

Um ein System dieser Art zu erhalten, hat man nur von einem gewöhnlichen Systeme, bei welchem die Summe der Coëfficienten nicht $= o$ ist, den Schwerpunkt zu suchen, und diesen als neuen Punkt mit einem Coëfficienten hinzuzufügen, welcher der negativen Summe der gegebenen gleich ist.

§. 11. Aus dem in §. 8. gegebenen Begriffe des Schwerpunktes lassen sich mehrere Folgerungen ziehen.

Sey von den Punkten A, B, C, D mit den resp. Coëfficienten a, b, c, d der Schwerpunkt S, so ist, A', B', C', D', S' in der schon oft gebrauchten Bedeutung genommen und zur Abkürzung $a + b + c + d = s$ gesetzt:

$$a.AA' + b.BB' + c.CC' + d.DD' = s.SS';$$

folglich auch für jede Lage der die Parallelen schneidenden Ebene:

$$a.AA' + b.BB' + c.CC' - s.SS' = -d.DD'$$

d. h. von den Punkten A, B, C, S mit den resp. Coëfficienten $a, b, c, -s$ ist D der Schwerpunkt.

Man hat ferner:

$$a.AA' + b.BB' = s.SS' - c.CC' - d.DD'.$$

Sey nun von A und B mit den Coëfficienten a und b der Schwerpunkt P, also $a.AA' + b.BB' = (a+b).PP'$, so ist auch $s.SS' - c.CC' - d.DD' = (a+b).PP'$; d. h.

die Punkte A und B mit den Coëfficienten a und b haben denselben Schwerpunkt, welcher den Punkten C, D und S mit den Coefficienten c, d und $-s$ zukommt.

Da sich das Gesagte auf jede grössere und geringere Anzahl von Punkten anwenden lässt, so schliessen wir daraus: Jeder Punkt eines Systems lässt sich als Schwerpunkt der übrigen Punkte betrachten, wenn zu diesen, als neuer Punkt, der Schwerpunkt des ganzen Systems mit einem Coëfficienten hinzugefügt wird, welcher der negativen Summe aller Coëfficienten gleich ist. — Auch hat ein beliebiger Theil der Punkte des Systems denselben Schwerpunkt, welchen der übrige Theil nebst dem Schwerpunkte des ganzen Systems mit dem gedachten Coëfficienten hat.

Wenn ferner einem Systeme der Schwerpunkt gänzlich fehlt (§. 10.), so wird auf eben die Art bewiesen, dass nicht nur jeder Punkt des Systems der Schwerpunkt der übrigen ist, sondern auch je zwei Theile, in welche man das ganze System zerlegt, einerlei Schwerpunkt haben.

§. 12. Noch mannigfaltiger werden die Folgerungen, wenn man zwei oder mehrere Systeme zugleich in Betrachtung zieht. — Seyen A, B, C die Punkte des einen Systems, a, b, c die resp. Coëfficienten und P der Schwerpunkt; D, E mit den Coëfficienten d, e die Punkte eines zweiten Systems und Q dessen Schwerpunkt. Man ziehe durch sämmtliche Punkte A, B, C, P, D, E, Q Parallelen, und schneide diese mit einer beliebig gelegten Ebene in den Punkten A', B' ... Q', so ist, wenn man zur Abkürzung $a+b+c=p$ und $d+e=q$ setzt:

1) $a.AA'+b.BB'+c.CC'=p.PP'$

2) $d.DD'+e.EE'=q.QQ'$.

Man addire beide Gleichungen, nachdem man sie zuvor mit den beliebig zu nehmenden Zahlen m und n resp. multiplicirt hat, so kommt:

$$3)\quad ma.AA'+mb.BB'+mc.CC'+nd.DD'+ne.EE'$$
$$=mp.PP'+nq.QQ',$$

d. h. der Schwerpunkt von A, B, C, D, E mit den Coëfficienten ma, mb, mc, nd, ne ist zugleich der Schwerpunkt von P und Q mit den Coefficienten mp und nq.

Setzen wir ferner, der Punkt D des zweiten Systems sey identisch mit dem Punkte A des ersten, also auch DD' mit AA', so zieht sich 3) in

$$(ma+nd)AA'+mb.BB'+mc.CC'+ne.EE'=mp.PP'+nq.QQ'$$

zusammen, und wenn wir nun das Verhältniss $m:n$ so bestimmen, dass $ma+nd=o$ wird, also $m:n=d:-a$ setzen:

$$bd.BB'+cd.CC'-ae.EE'=dp.PP'-aq.QQ'.$$

Somit kann man also einen Punkt, welchen zwei Systeme gemeinschaftlich haben, aus ihnen eliminiren.

Eben so würde, wenn C mit Q identisch wäre, die Elimination dieses Punktes

$$aq.AA'+bq.BB'+cd.DD'+ce.EE'=pq.PP'$$

geben, also P der Schwerpunkt von A, B, D, E mit den Coëfficienten aq, bq, cd, ce seyn; u. s. w.

Man begreift ohne weitern Zusatz, wie sich das hier nur von zwei Systemen Gesagte auf die Verbindung jeder beliebigen Anzahl von Systemen und beliebiger Mengen ihrer Punkte ausdehnen lässt.

Zweites Capitel.

Der barycentrische Calcul.

§. 13. Bei Rechnungen, wie wir so eben (§. 11 und 12.) führten, bietet sich gleichsam von selbst eine kleine Abkürzung dar. Da nämlich die Glieder aller jener Gleichungen Producte aus numerischen Coëfficienten in Abschnitte von Parallelen sind, von denen die einen Endpunkte sämmtlich in einer Ebene liegen, die andern aber gegebene oder daraus zu bestimmende Punkte sind, und folglich das Unterscheidende der Abschnitte nichts anders, als diese letztern Punkte selbst ausmachen, so können wir, ohne Verwirrung fürchten zu müssen, in den Gleichungen die Abschnitte durch die, diese Punkte bezeichnenden, Buchstaben allein ausdrücken. Ist also z. B. S der Schwerpunkt von A, B, C mit den Coëfficienten $a, b, -c$, und folglich $a \, . \, AA' + b \, . \, BB' - c \, . \, CC' = (a + b - c) \, SS'$, so schreibe man statt dessen: $aA + bB - cC = (a + b - c) \, S$.

Und wirklich könnte man auch nicht einfacher den blossen Satz, dass S der Schwerpunkt von A, B, C mit den Gewichten $a, b, -c$ sey, und dass man sich in S diese Gewichte vereinigt zu denken habe, durch die Zeichen der Algebra darstellen. Allein unsere Formel ist mehr, als ein blos abgekürzter Ausdruck dieses Satzes, in welchem Falle sie nur die Gestalt einer algebraischen Gleichung hätte, noch nicht aber algebraische Operationen mit sich vornehmen liesse. In-

dem man A, B, C... nicht mehr als die blossen Punkte, sondern als die ihnen entsprechenden Abschnitte nimmt, — woran man aber im Verlauf der Rechnung nicht weiter zu denken braucht, — stellt jene Formel zugleich eine Haupteigenschaft des Schwerpunkts in der Sprache der Algebra dar, und wird dadurch eben der Behandlung, wie jede andere algebraische Gleichung, fähig.

§. 14. Die Rechnung mit solchen abgekürzten Formeln ist es nun, welche ich den barycentrischen, d. i. den aus dem Begriffe des Schwerpunkts abgeleiteten, Calcul genannt habe, einen Calcul, der es nicht nur mit wirklichen Zahlengrössen, sondern scheinbar auch mit blossen Punkten zu thun hat, dennoch aber von der gewöhnlichen Rechnungsweise der Algebra sich im Ganzen nicht unterscheidet. Der bessern Uebersicht willen halte ich es für dienlich, die, wiewohl schon in dem Vorhergehenden zur Genüge enthaltenen, Grundregeln des neuen Calculs in folgenden Sätzen noch kürzlich zusammenzustellen.

§. 15. 1) Die Gegenstände des barycentrischen Calculs sind Punkte und numerische Coëfficienten derselben. Erstere werden mit den grossen Buchstaben des Alphabets, letztere mit den kleinen bezeichnet und erstern mit ihren Zeichen vorgesetzt. So heisst z. B. aA, oder $+aA$ im Zusammenhange, der Punkt A mit dem Coëfficienten a; $-bB$, der Punkt B mit dem Coëfficienten $-b$. Ist der Coëfficient die Einheit, so wird nur das Zeichen derselben dem Punkte vorgesetzt, als A oder $+A$, $-B$, d. i. A mit dem Coëfficienten 1, B mit dem Coëfficienten -1.

2) Dass von den Punkten A, B, C, D,... denen resp. die Coëfficienten a, b, c, d, ... zukommen, S der Schwerpunkt ist, wird ausgedrückt durch:

I. $aA+bB+cC+dD+\ldots=(a+b+c+d+\ldots)S$,

so dass auf der einen Seite des Gleichheitszeichens die Punkte mit ihren Coëfficienten und auf der andern der Schwerpunkt mit einem Coëfficienten steht, welcher der algebraischen Summe jener Coëfficienten gleich ist.

3) Dass die Punkte $A, B, C, \ldots$ mit den Coëfficienten $a, b, c, \ldots$ denselben Schwerpunkt, als die Punkte $F, G, \ldots$ mit den Coëfficienten $f, g, \ldots$ haben, vorausgesetzt, dass die Summe der Coëfficienten der erstern Punkte $a+b+c+\ldots=$ der Summe der Coëfficienten der letztern $f+g+\ldots$ ist, dies drückt die Gleichung aus:

$$\text{II.}\quad aA+bB+cC+\ldots=fF+gG+\ldots$$

Sind von den ursprünglich gegebenen Coëfficienten zweier Systeme mit einerlei Schwerpunkte die Summen nicht gleich, so hat man nur jeden Coëfficienten des einen Systems mit der Summe der Coëfficienten des andern Systems zu multipliciren, um diese Gleichheit herzustellen, und somit die Idendität der Schwerpunkte durch eine Gleichung ausdrücken zu können.

4) Die Gleichung

$$\text{III.}\quad aA+bB+cC+\ldots=0,$$

welche nur unter der Voraussetzung statt finden kann, dass auch die Summe der Coëfficienten $a+b+c+\ldots=0$ ist, zeigt an, dass das System der Punkte $A, B, C, \ldots$ mit den Coëfficienten $a, b, c, \ldots$ keinen Schwerpunkt hat.

5) Alle Gleichungen des barycentrischen Calculs haben eine der drei Formen I. II. und III. und müssen diese Formen auch bei allen Umwandlungen, die man mit ihnen vornimmt, behalten. Die auf solche Gleichungen anwendbaren Operationen der Algebra beschränken sich daher auf folgende zwei:

a) dass man zu beiden Seiten der Gleichung Gleiches addirt oder subtrahirt; nur darf das zu Addirende

oder zu Subtrahirende keine blosse Zahl, sondern muss ein Punkt oder das Aggregat mehrerer Punkte mit ihren Coëfficienten seyn.

b) dass man beide Seiten mit Gleichem multiplicirt oder dividirt, nur darf der Multiplicator oder Divisor keine Punkte enthalten, sondern muss eine blosse Zahl seyn.

6) Alle unter den Formen I. II. III. begriffenen Gleichungen haben dieses mit einander gemein, dass sie auch nach Weglassung der, die Punkte (oder vielmehr die den Punkten zugehörigen Abschnitte der Parallelen) bezeichnenden, Buchstaben noch Gleichungen bleiben. Den Grund dieser Gleichheit der Coëfficientensummen zu beiden Seiten des Zeichens (=) giebt die im vorigen Capitel entwickelte Theorie. Wollte man nichts weiter, als durch Zeichen darstellen, dass ein gewisser Punkt der Schwerpunkt eines gegebenen Systems sey, oder dass zwei Systeme einerlei Schwerpunkt haben, so wäre, jene Forderung der gleichen Coëfficientensummen zu berücksichtigen, offenbar unnöthig, und man würde somit noch etwas kürzere Formeln erhalten. Da diese Kürze in mehrern Fällen sehr zweckdienlich ist, so wollen wir alsdann, um solche Formeln von den eigentlichen Gleichungen zu unterscheiden, statt des Zeichens (=) das Zeichen (≡) gebrauchen, und hiernach statt der Gleichung I.,

die Formel $aA+bB+cC+\ldots \equiv S$,

und statt der Gleichung II., auch wenn $a+b+c+\ldots$ nicht $=f+g+\ldots$ ist,

die Formel $aA+bB+cC+\ldots \equiv fF+gG+\ldots$ schreiben.

§. 16. Wenn mit Hülfe der Algebra in der Geometrie ein Lehrsatz erwiesen, oder eine Aufgabe gelöst

werden soll, so ist, ausser der Kenntniss der Algebra selbst, noch nöthig, dass man erstlich die geometrischen Bedingungen des Lehrsatzes oder der Aufgabe in algebraische Formeln einzukleiden wisse, und dass man zweitens das Resultat, welches man durch eine passende mit diesen Formeln angestellte Rechnung gefunden hat, wiederum in die Sprache der Geometrie zu übersetzen verstehe. Nun ist in den Sätzen des vorigen §. nur der Mechanismus des barycentrischen Calculs, nur die Form und die Behandlung seiner Gleichungen gezeigt worden. Denn wiewohl diese Gleichungen schon an sich nicht rein arithmetischer, sondern zugleich geometrischer Natur sind, indem sie sich immer auf ein gewisses System von Punkten beziehen, so wird doch von der in dem Vorigen gegebenen geometrischen Bedeutung derselben kein unmittelbarer Gebrauch gemacht werden. Es bleibt uns daher immer noch übrig, die Sätze aufzustellen, mittelst welcher man bei geometrischen Untersuchungen von den Eigenschaften einer Figur zu den barycentrischen Formeln, und umgekehrt, von diesen zu jenen übergehen kann, oder mit andern Worten, zu zeigen, wie und von welchen Eigenschaften einer Figur die oftgedachten Formeln als Bedingungsgleichungen auftreten können. Um aber diese Sätze ohne Unterbrechung mitzutheilen, müssen wir folgende, an §. 1. sich schliessende Vorerinnerungen einschalten.

§. 17. Der Perimeter eines Dreiecks kann von einem darin sich bewegenden Punkte nach doppeltem Sinne durchlaufen werden. Heisse die eine Bewegung, z. B. die von der Linken nach der Rechten, wenn man sich innerhalb der Fläche des Dreiecks, und das Auge auf

sie herabsehend denkt, die positive; die andere von der Rechten nach der Linken, die negative. Ist nun das Dreieck, wie gewöhnlich, durch irgend eine Zusammenstellung der drei an die Spitzen gesetzten Buchstaben ausgedrückt, so bezeichne dieser Ausdruck den positiven oder negativen Werth der Fläche des Dreiecks, je nachdem die Bewegung eines Punktes, durch den man sich den Perimeter des Dreiecks so beschrieben denkt, dass er die Spitzen in der durch den Ausdruck gegebenen Folge trifft, nach der vorhin gemachten Bestimmung positiv oder negativ ist. Wir ziehen hieraus nachstehende Folgerungen.

§. 18. *a.* Bezeichnen A, B, C die drei Spitzen eines Dreiecks, so haben die Ausdrücke für den Flächeninhalt: ABC, BCA, CAB einerlei Werth, den entgegengesetzten aber von CBA, BAC, ACB.

b. Seyen B, C, D drei Punkte in gerader Linie und A ein vierter ausserhalb derselben. So wie nun nach §. 1. $CD+DB+BC=0$ war, eben so ist mit Vorsetzung von A die Summe der Dreiecke:

$$ACD+ADB+ABC=0;$$

auch verhält sich:

$$ACD : ADB : ABC = CD : DB : BC.$$

c. Seyen A, B, C, D irgend vier in einer Ebene befindliche Punkte, von denen keine drei in einer Geraden liegen. Man verbinde sie zu zweien durch gerade Linien, und sey Z der Durchschnittspunkt der Geraden AB und CD. (Denn immer wird wenigstens eine von den, durch A und einen der drei Punkte B, C, D gelegten, Geraden, die Gerade durch die beiden andern Punkte schneiden. Diese eine sey hier AB.) Alsdann ist, weil C, D, Z in einer Geraden liegen:

$$ADZ+AZC+ACD=0$$
$$BDZ+BZC+BCD=0$$

und, weil A, B, Z in einer Geraden liegen:

$$CBZ+CZA+CAB=0$$
$$DBZ+DZA+DAB=0$$

Man addire diese vier Gleichungen mit den Zeichen $-$, $+$, $-$, $+$, so heben sich alle die mit Z behafteten Ausdrücke, und es kommt:

$$-ACD+BCD-CAB+DAB=0,$$

wofür man auch noch die symmetrischen Formeln

I. $BCD-CDA+DAB-ABC=0$

oder II. $DBC+DCA+DAB=ABC$, u. s. w.

setzen kann. (Vergl. §. 1. I. und II.)

§. 19. Eine dreiseitige Pyramide wird durch irgend eine Zusammenstellung ($BCAD$) der vier an ihre Spitzen gesetzten Buchstaben (A, B, C, D) bezeichnet. Um nun auch hier durch die Folge der Buchstaben in der Zusammenstellung ausdrücken zu können, ob der körperliche Inhalt der Pyramide positiv oder negativ genommen werden solle, und durch dieses Mittel zu eben so allgemeinen Formeln, wie vorhin für das Dreieck, zu gelangen, so denke man sich das Auge an die durch den ersten Buchstaben (B) in der Complexion bezeichnete Spitze gestellt, und nach dem durch die drei übrigen Buchstaben bezeichneten Dreieck (CAD) als Grundfläche hinsehend. Je nachdem nun der Folge dieser Buchstaben, nach der in §. 17. gegebenen Regel, der positive oder negative Werth der Dreiecksfläche entspricht, stelle auch der Ausdruck der Pyramide den positiven oder negativen Werth ihres körperlichen Inhalts vor. (Denkt man sich die Fläche ACD der Pyramide [Fig. 5.] in der Ebene des Papiers und die Spitze B vor

[hinter] derselben liegend, und wird wie vorhin die Bewegung von der Linken nach der Rechten für die positive genommen, so drückt *BCAD* den positiven [negativen] Werth der Pyramide aus.) Es ergeben sich hieraus folgende Sätze.

§. 20. *a*. Bezeichnen *A, B, C, D* die vier Spitzen einer dreiseitigen Pyramide, und bringt man auf die beschriebene Weise jede der 24 Permutationen dieser 4 Buchstaben mit der Pyramide in Vergleichung, so erhält man folgende zwei Reihen:

ABCD	*ABDC*
ACDB	*ACBD*
ADBC	*ADCB*
BADC	*BACD*
BCAD	*BCDA*
BDCA	*BDAC*
CABD	*CADB*
CBDA	*CBAD*
CDAB	*CDBA*
DACB	*DABC*
DBAC	*DBCA*
DCBA	*DCAB*

von denen die Ausdrücke jeder Reihe für sich, einerlei Werth, den entgegengesetzten aber der Ausdrücke der andern Reihe haben.

Anmerk. Bei etwas aufmerksamer Betrachtung dieser 24 Ausdrücke wird man bald gewahr, dass je zwei derselben, wo zwei Buchstaben des einen in dem andern ihre Stellen gegenseitig vertauscht haben, sich entgegengesetzt sind; z. B. *ABCD* und *BACD*, *ADCB* und *ABCD*, *BDCA* und *ADCB*. Soll daher von irgend zweien dieser Ausdrücke ihr gegenseitiges Verhalten erforscht werden, so stelle man mit dem einen die Operation des gegenseitigen Vertauschens zweier Buchstaben so oft an, bis der andere zum Vorschein kommt. Ist die Zahl dieser Operationen gerade, so haben die Ausdrücke einerlei Zeichen; ist sie ungerade, verschiedene.

Man habe z. B. $BADC$ und $DBAC$. Aus $\pm BADC$ wird 1) $\mp DABC$ und 2) $\pm DBAC$.

Seyen zu vergleichen $ABCD$ und $BCDA$. Aus $\pm ABCD$ wird 1) $\mp BACD$, 2) $\pm BCAD$ und 3) $\mp BCDA$.

b. Sind C, D, E drei Punkte einer geraden Linie, B ein vierter Punkt ausserhalb derselben, und A ein fünfter Punkt ausserhalb der durch B, C, D, E gehenden Ebene, so war (§. 18. *b.*) $BDE + BEC + BCD = 0$, und auf gleiche Weise ist mit Vorsetzung des Buchstaben A, die Summe der Pyramiden:

$$ABDE + ABEC + ABCD = 0;$$

auch verhält sich:

$$ABDE : ABEC : ABCD = BDE : BEC : BCD$$
$$= ADE : AEC : ACD = DE : EC : CD.$$

c. Sind B, C, D, E irgend vier Punkte einer Ebene, und A ein fünfter Punkt ausserhalb derselben, so war (§. 18. *c.*) $CDE - DEB + EBC - BCD = 0$, und eben so ist mit Vorsetzung von A die Summe der Pyramiden:

$$ACDE - ADEB + AEBC - ABCD = 0,$$

und es verhält sich:

$$ACDE : ADEB : AEBC : ABCD = CDE : DEB : EBC : BCD.$$

d. Seyen A, B, C, D, E irgend fünf Punkte im Raume überhaupt, von denen keine vier in einer Ebene liegen. Schneide die Gerade DE die Ebene ABC im Punkte Z. (Denn immer wird wenigstens eine von den, durch E und einen der vier Punkte A, B, C, D gelegten, Geraden die durch die drei übrigen Punkte gehende Ebene schneiden. Diese eine sey hier DE.) Da hiernach erstens die Punkte D, E, Z in einer Geraden liegen, so hat man:

$$BCEZ + BCZD + BCDE = 0$$
$$CAEZ + CAZD + CADE = 0$$
$$ABEZ + ABZD + ABDE = 0$$

Weil zweitens die Punkte A, B, C, Z in einer Ebene enthalten sind, so ist

$$DBCZ - DCZA + DZAB - DABC = 0$$

$$- EBCZ + ECZA - EZAB + EABC = 0$$

Addirt man nun diese fünf Gleichungen, so fallen, weil $BCEZ = EBCZ$, $BCZD = - DBCZ$, u. s. w., alle die mit Z behafteten Glieder heraus, und man bekommt:

$$BCDE + CADE + ABDE - DABC + EABC = 0$$

oder symmetrischer:

I. $BCDE + CDEA + DEAB + EABC + ABCD = 0$

oder II. $EBCD - ECDA + EDAB - EABC = ABCD$

u. s. w., wie auch die fünf Punkte im Raume liegen mögen. Vergl. die Formeln I. und II. in §. 1. und 18.

Lehrsätze zur Anwendung des barycentrischen Calculs.

§. 21. Lehrsatz. Wenn $aA + bB \equiv C$, so liegt C mit A und B in gerader Linie, und es verhält sich:

$$a : b = BC : CA.$$

Beweis. Nach §. 2. und 3. liegt der Schwerpunkt C zweier Punkte A und B mit ihnen selbst in gerader Linie, und wird eben dadurch gefunden, dass man die Linie BA in C nach dem Verhältnisse der Coëfficienten $a : b$ theilt.

§. 22. Zusätze. *a*. Wenn $aA + bB \equiv C$ und $a'A + b'B \equiv C$, so verhält sich: $a : b = a' : b'$.

b. Weil die Linie BA nur in Einem Punkte C nach einem gegebenen Verhältnisse $a : b$ theilbar ist, so gilt der Satz auch umgekehrt. Jeder Punkt C einer Geraden lässt sich daher immer als Schwerpunkt irgend

zweier anderer in derselben liegenden Punkte A und B betrachten, deren Coëfficienten in dem, durch die gegenseitige Lage der Punkte gegebenen, Verhältnisse $BC : CA$, und keinem andern stehen.

Allerdings kann jeder gegebene Punkt P einer Geraden als Schwerpunkt auch von drei oder mehreren Punkten derselben, $A, B, C, ..$ angesehen werden. Alsdann finden aber zwischen den Coëfficienten der Punkte nicht mehr bestimmte Verhältnisse statt. Denn sey P auf A und B bezogen, $\equiv aA + bB$, und auf B und C bezogen, $\equiv bB + cC$, so ist auch $P \equiv aA + bB + m(bB + cC)$ $\equiv aA + (1 + m) bB + mcC$, wo für m jede beliebige Zahl genommen werden kann. — Aehnliche Bemerkungen sind in den folgenden §. 24. *b.* und §. 26. *b.* zu wiederholen.

c. Aus $aA + bB = (a + b) C$ folgt $aA + bB - (a + b) C = 0$, und wenn wir $-(a + b) = c$ setzen, $aA + bB + cC = 0$, $bB + cC \equiv A$, und hieraus eben so wie vorhin, $b : c = CA : AB$. Unser Satz lässt sich daher noch symmetrischer so ausdrücken:

Ist $aA + bB + cC = 0$, so liegen A, B, C in gerader Linie, und es verhalten sich $a : b : c = BC : CA : AB$. Auch gilt dieser Satz umgekehrt.

§. 23. Lehrsatz. Wenn $aA + bB + cC \equiv D$, und A, B, C nicht in einer Geraden enthalten sind, so liegt D mit A, B, C in einer Ebene (§. 4. und 5.), und es verhalten sich:

$$a : b : c = \text{die Dreiecke } DBC : DCA : DAB.$$

Beweis. Von den drei Summen, welche sich, je zwei der drei Coëfficienten a, b, c zusammengenommen, bilden lassen, ist immer wenigstens eine nicht $= 0$. Sey $a + b$ diese Summe, und man setze I. $aA + bB = (a + b) Z$, so wird II. $D \equiv (a + b) Z + cC$.

Wegen II. liegen nun (§. 21.) C, D, Z in gerader Linie, und es verhält sich:

$$1)\quad a+b : c = CD : DZ = BCD : BDZ = ACD : ADZ$$
(§ 18. *b.*)

folglich $2)\ DBZ : DZA = DBC : DCA$. (§. 18. *a.*)

Wegen I. liegt Z aber auch in der Geraden AB, und es verhält sich:

$$3)\quad a : b = BZ : ZA = DBZ : DZA,$$

folglich wegen 2) . . , $4)\ a : b = DBC : DCA$.

Aus 3) folgt weiter:

$b : a+b = DZA : DBZ + DZA = ADZ : DBA$ (§. 18. *b.*)

folglich in Verbindung mit 1):

$$b : c = ACD : DBA = DCA : DAB,$$

und hieraus in Verbindung mit 4) die Proportion des Lehrsatzes.

§. 24. Zusätze. *a.* Wenn A, B, C nicht in einer Geraden liegen und $aA + bB + cC \equiv D$, $a'A + b'B + c'C \equiv D$ ist, so verhalten sich $a : b : c = a' : b' : c'$.

b. Jeder Punkt D einer Ebene lässt sich als Schwerpunkt irgend dreier anderer nicht in einer Geraden liegenden Punkte A, B, C der Ebene betrachten, deren Coëfficienten in bestimmten Verhältnissen zu einander stehen.

Denn sey Z der Durchschnitt der Linien AB und CD (§. 18. *c.*). Weil er sowohl mit A und B als mit C und D in gerader Linie liegt, kann man ihn (§. 22. *b.*) $\equiv \alpha A + \beta B$ und $\equiv \gamma C + \delta D$ setzen, wo $\alpha : \beta$ und $\gamma : \delta$ bestimmte Verhältnisse sind.

Nimmt man nun, was immer möglich ist, die Zahlen dieser Verhältnisse $\alpha : \beta$, $\gamma : \delta$ so, dass $\alpha + \beta = \gamma + \delta$

(§. 15. 3)), wodurch auch $\beta:\gamma$ ein bestimmtes Verhältniss wird, so kommt:

$$\alpha A+\beta B=\gamma C+\delta D,$$
$$\text{mithin } D\equiv\alpha A+\beta B-\gamma C.$$

Auch können sich nach dem Lehrsatze, α, β, $-\gamma$ nicht anders, als wie die Dreiecke DBC, DCA, DAB verhalten.

c. Man setze in der Formel des Lehrsatzes $a+b+c=-d$, so wird $aA+bB+cC=-dD$, $aA+bB+cC+dD=0$, $bB+cC+dD\equiv A$, und es verhält sich:

$$b:c:d=ACD:ADB:ABC.$$

Um diese Proportion mit der obigen verbinden zu können, schreibe man sie (§. 18. *a.*):

$$a:b:c=BCD:-CDA:DAB$$
$$b:c:d=-CDA:DAB:-ABC$$

Dies giebt folgenden noch symmetrischeren Satz: Ist $aA+bB+cC+dD=0$, so liegen A, B, C, D in einer Ebene und es verhalten sich:

$$a:b:c:d=BCD:-CDA:DAB:-ABC$$

Vergl. §. 18. *c.* Vermöge vorigen Zusatzes ist dieser Satz auch umgekehrt richtig.

d. Ist $aA+bB+cC+dD=0$, und heissen die Durchschnitte von BC und AD, AC und BD, AB und CD resp. E, F, G, so hat man:

$$E\equiv bB+cC\equiv aA+dD,$$
$$F\equiv aA+cC\equiv bB+dD,$$
$$G\equiv aA+bB\equiv cC+dD.$$

§. 25. **Lehrsatz.** Wenn $aA+bB+cC+dD\equiv E$, und A, B, C, D nicht in einer Ebene liegen, so verhalten sich:

$a:b:c:d=$ die Pyramiden $BCDE:CDEA:DEAB:EABC$.

Beweis. Aus den vier Coëfficienten a, b, c, d lassen sich, je drei zusammengenommen, vier Summen bilden, von denen immer wenigstens eine nicht $=0$ ist. Sey $a+b+c$ diese eine Summe, und man setze

$$\text{I.}\ aA+bB+cC=(a+b+c)\,Z,$$

so wird $\text{II.}\ (a+b+c)\,Z+dD\equiv E.$

Wegen II. liegen nun Z, D, E in einer Geraden, und es verhält sich:

$$1)\ a+b+c:d=DE:EZ=BCDE:BCEZ$$
$$=CADE:CAEZ=ABDE:ABEZ$$
(§. 20. *b.*)

folglich $2)\ EZBC:EZCA:EZAB=BCDE:CDEA:DEAB.$

Sodann ist (§. 23.) wegen I., Z auch in der Ebene ABC enthalten, und es verhält sich:

$$3)\ a:b:c=ZBC:ZCA:ZAB$$
$$=EZBC:EZCA:EZAB$$ (§. 20. *c.*),

folglich wegen 2):

$$4)\ a:b:c=BCDE:CDEA:DEAB.$$

Ferner erhält man aus 3):

$$c:a+b+c=ZAB:ABC$$ (§. 18. *c.* II.)
$$=EZAB:EABC,$$

und hieraus in Verbindung mit 1):

$$c:d=DEAB:EABC$$

woraus sich in Verbindung mit 4) die im Lehrsatz aufgestellte Proportion ergiebt.

§. 26. **Zusätze.** *a.* Wenn A, B, C, D nicht in einer Ebene liegen, und $aA+bB+cC+dD\equiv E$, $a'A+b'B+c'C+d'D\equiv E$ ist, so verhalten sich: $a:b:c:d=a':b':c':d'$.

b. Jeder Punkt E im Raume lässt sich als Schwerpunkt von irgend vier andern nicht in einer Ebene

liegenden Punkten A, B, C, D ansehen, deren Coëfficienten in bestimmten Verhältnissen zu einander stehen. Denn schneide die Gerade DE die Ebene ABC im Punkte Z (§. 20. $d.$), so kann man nach §. 22. $b.$ §. 24. $b.$ und §. 15. 3),

$$Z \equiv \delta D + \varepsilon E = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

setzen. Dies giebt: $E \equiv \alpha A + \beta B + \gamma C - \delta D$.

Nach dem Lehrsatze können sich aber $\alpha, \beta, \gamma, -\delta$ nicht anders als wie die Pyramiden $BCDE, \ldots EABC$ verhalten.

c. Setzt man $a+b+c+d = -e$, so erhält man nach derselben Schlussfolge, die in §. 22. *c.* bei drei Punkten in einer Geraden und in §. 24. *c.* bei vier Punkten in einer Ebene angewendet wurde, den Satz:

Wenn $aA+bB+cC+dD+eE=0$, so liegen die fünf Punkte A, B, C, D, E im Raume dergestalt, dass

$$BCDE : CDEA : DEAB : EABC : ABCD = a : b : c : d : e.$$

Vergl. §. 20. *d.* Auch gilt dieser Satz umgekehrt.

d. Ist $aA+bB+cC+dD+eE=0$, und bezeichnet man die Durchschnitte der Geraden und Ebenen, AB und CmE, AC und BmE, etc. resp. mit F, G, etc., so kommt:

$$F \equiv aA+bB \equiv cC+dD+eE$$
$$G \equiv aA+cC \equiv bB+dD+eE, \text{ u. s. w.}$$

§. 27. Die Sätze (§. 22. *c.*, §. 24. *c.*), dass, wenn $aA+bB+cC=0$ ist, A, B, C in gerader Linie liegen, und wenn $aA+bB+cC+dD=0$ ist, A, B, C, D in einer Ebene enthalten sind, gelten offenbar nur unter der Voraussetzung, dass nicht jeder Coëfficient, einzeln genommen, $=0$ ist. Denn sonst würden der erstern Gleichung jede drei, auch nicht in einer Geraden lie-

genden, Punkte, und der letztern jede vier, auch nicht in einer Ebene begriffenen, Punkte Genüge leisten. Weiss man also umgekehrt, dass A, B, C nicht in einer Geraden liegen, und dennoch $aA+bB+cC=0$ seyn soll, so hat man daraus zu schliessen, dass $a=b=c=0$ seyn müsse. Dies lässt sich auch folgendergestalt geradezu darthun.

Man setze in der Gleichung, $aA+bB+cC=0$, $a=g-h$ und $b=h-f$, folglich $c=f-g$, so wird sie

$$(g-h)A+(h-f)B+(f-g)C=0$$

und daher $gA+hB+fC=hA+fB+gC$.

Liegen nun A, B, C nicht in gerader Linie, so wird durch $gA+hB+fC$ und $hA+fB+gC$ ein und derselbe Punkt der Ebene ABC ausgedrückt, und es verhält sich (§. 24. *a.*):

$$g:h:f=h:f:g,$$

woraus $f=g=h$ folgt. Mithin ist $a=b=c=0$.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, dass, wenn $aA+bB+cC+dD=0$ ist und A, B, C, D nicht in einer Ebene liegen, jeder der vier Coëfficienten a, b, c, d für sich $=0$ seyn muss.

Ist ferner $aA+bB+cC+dD=0$, und liegen A, B, C in einer Geraden, D aber ausserhalb derselben, so muss $d=0$ seyn, indem sonst auch $D\equiv aA+bB+cC$ ein Punkt der Geraden ABC seyn würde.

Wenn endlich $aA+bB+cC+dD+eE=0$ ist, und A, B, C, D in einer Ebene begriffen sind, E aber ausserhalb derselben liegt, so folgt aus ganz ähnlichem Grunde, $e=0$.

Drittes Capitel.

Neue Methode, die Lage von Punkten zu bestimmen.

§. 28. Zu der Bestimmung der Lage von Punkten, sey es in einer gegebenen Geraden, oder in einer gegebenen Ebene oder im Raume überhaupt, werden Stücke von zweierlei Art erfordert. Die einen bleiben für alle Punkte dieselben, wie z. B. die Axen eines gewöhnlichen Coordinatensystems. Die andern, welche Coordinaten im allgemeinsten Sinne heissen, hängen von der verschiedenen Lage der Punkte gegen die erstern ab, und sind daher von einem Punkte zum andern veränderlich.

Die jetzt zu erörternde Methode, Punkte zu bestimmen, besteht nun im Wesentlichen darin, dass, als unveränderliche Stücke, gewisse Punkte genommen werden, die ich Fundamentalpunkte nennen will, und der zu bestimmende Punkt als Schwerpunkt derselben gedacht wird. Die veränderlichen Stücke oder die Coordinaten sind demnach hier die Verhältnisse, welche zwischen den Coëfficienten der Fundamentalpunkte statt finden müssen, damit der zu bestimmende Punkt dieser Punkte Schwerpunkt sey.

Zur Vollkommenheit einer Bestimmungsmethode wird erfordert, dass beliebig gegebenen möglichen Werthen der Coordinaten immer ein und nicht mehr als ein gewisser Punkt entspreche, und dass umgekehrt für ir-

gend einen gegebenen Punkt jede der Coordinaten immer und nur einen möglichen Werth erhalte. Da nun jedes gegebene System von Punkten und deren Coëfficienten immer und nicht mehr als einen Schwerpunkt hat (§. 8.), so wird hiermit der ersten dieser Forderungen immer Genüge geschehen. Wie aber auch die zweite Forderung erfüllt, und jeder gegebene Punkt als Schwerpunkt der Fundamentalpunkte mit, nur auf eine Weise bestimmbaren, Coëfficienten betrachtet werden könne, dies ergiebt sich unmittelbar aus den Sätzen §. 22. *b*, §. 24. *b*, §. 26. *b*, wie wir sogleich mit Weiterem sehen werden.

Bestimmung eines Punktes in einer geraden Linie.

§. 29. Man nehme als Fundamentalpunkte irgend zwei Punkte A, B der Geraden; so ist, wenn man $pA + qB \equiv P$ setzt, für jeden gegebenen Werth des Verhältnisses $p:q$ ein Punkt P der Geraden bestimmt, und umgekehrt ist mit jedem Punkte P der Geraden auch das Verhältniss $p:q$ ($= BP : PA$) gegeben (§. 22. *b*). Heisse daher $pA + qB$ der Ausdruck des Punktes P.

§. 30. Durch die Fundamentalpunkte A, B wird die Gerade in drei Theile getheilt, von denen der zwischen A und B begriffene endlich, die beiden andern unendlich sind. Haben nun p und q einerlei Vorzeichen, so liegt P in dem endlichen Theile. Sind überdies p und q einander gleich, so wird P der Mittelpunkt von AB, der daher $A + B$ zum Ausdrucke hat. Ist der Coëfficient des einen F.punktes $= 0$, so fällt P mit dem andern selbst zusammen. Sind die Vorzeichen von p und q verschieden, so liegt P in dem unendlichen Theile auf der Seite von A, oder in dem auf der Seite von B, je nachdem p oder q der absolut grössere Coëfficient ist.

(§. 3. b). Für $p = -q$, wird P ein unendlich entfernter Punkt der Linie, dessen Ausdruck daher $A - B$ oder $B - A$ ist (§. 9).

Bestimmung eines Punktes in einer Ebene.

§. 31. Man nehme zu Fundamentalpunkten beliebige drei Punkte A, B, C der Ebene, die nicht in einer Geraden liegen. Die drei sie verbindenden Geraden BC, CA, AB heissen Fundamentallinien, und das von diesen begränzte Dreieck ABC das Fundamentaldreieck. Setzt man nun $pA + qB + rC \equiv P$, so entspricht beliebig gegebenen Werthen der zwei in $p:q:r$ liegenden Verhältnisse ein gewisser Punkt P der Ebene. Und umgekehrt, ist irgend ein Punkt P der Ebene gegeben, so sind damit auch die Werthe der Verhältnisse $p:q:r$ immer und ohne Zweideutigkeit bestimmbar (§. 24. b).

Heisse wiederum $pA + qB + rC$ der Ausdruck des Punktes P.

Als Coördinaten können hier nach §. 23. auch die gegenseitigen Verhältnisse der drei Dreiecke PBC, PCA, PAB, welche P mit den F.punkten bildet, angesehen werden.

§. 32. Durch die drei F.linien wird die Ebene in sieben Theile zerlegt, von denen der eine das F.dreieck selbst ist, die sechs übrigen aber unendliche Flächen sind, die wir nach Angabe der 4ten Figur mit $\overline{ABC}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ bezeichnen. Wir wollen nun die Relationen zu bestimmen suchen, die zwischen den Coëfficienten von A, B, C statt finden, je nachdem P in dem einen oder andern dieser Theile enthalten ist.

Zu diesem Ende sey $qB+rC\equiv X$, so ist $pA+(q+r)X\equiv P$, und X der Durchschnitt der Linien BC und AP (§. 23.).

Angenommen nun, dass q und r gleiche Zeichen haben, so liegt (§. 30.) X zwischen B und C, und die Linie APX geht durch die Felder $\overline{A}$, $\overline{ABC}$, $\overline{BC}$, und zwar durch das erste mit dem ausserhalb AX auf der Seite von A befindlichen Theile, durch das zweite mit dem Theile AX selbst, durch das dritte mit dem ausserhalb AX auf der Seite von X gelegenen.

Da nun $P\equiv pA+(q+r)X$, so fällt P in den ersten dieser Theile, also in das Feld $\overline{A}$, wenn p absolut grösser als die Summe $q+r$, aber ihr entgegengesetzt ist; in den zweiten Theil, mithin in $\overline{ABC}$, wenn p mit $q+r$ von einerlei Zeichen ist, d. h. wenn p, q und r einerlei Zeichen haben; in den dritten Theil oder in $\overline{BC}$, wenn $q+r$ absolut grösser als p und ihm entgegengesetzt ist.

P liegt demnach

I. in $\overline{ABC}$, wenn p, q, r einerlei Zeichen haben,

II. $\begin{cases} \text{in } \overline{BC}, \text{ wenn } q+r>p \text{ und eben so} \\ \text{in } \overline{CA}, \text{ wenn } r+p>q \\ \text{in } \overline{AB}, \text{ wenn } p+q>r \end{cases}$

III. $\begin{cases} \text{in } \overline{A}, \text{ wenn } p>q+r \text{ und eben so} \\ \text{in } \overline{B}, \text{ wenn } q>r+p \\ \text{in } \overline{C}, \text{ wenn } r>p+q \end{cases}$

mit der nothwendigen Bemerkung, dass immer die zwei auf der einen Seite des Zeichens ($>$) befindlichen Coëfficienten einerlei Vorzeichen unter sich, das entgegengesetzte aber von dem auf der andern Seite stehenden haben.

In dem speciellen Falle, wo der Coëfficient des einen F.punktes $=0$ ist, liegt P in der F.linie, welche die beiden andern F.punkte verbindet. Sind die Coëfficienten zweier F.punkte, jeder einzeln, $=0$, so ist P der dritte F.punkt selbst.

Ist endlich die Summe der drei Coëfficienten $=0$, haben also zwei derselben, z. B. q und r, einerlei Zeichen, und ist ihre Summe dem entgegengesetzten Werthe des dritten p gleich, so ist P ein unendlich entfernter Punkt nach einer durch die Felder $\overline{BC}$ und $\overline{A}$ sich erstreckenden Richtung, die von den drei parallel laufenden Linien durch A und den Punkt $qB+rC$, durch B und $rC-(q+r)A$, durch C und $-(q+r)A+qB$ bestimmt wird. (§. 9.). Unbestimmt aber bleibt es, wenigstens im Allgemeinen, ob P in $\overline{BC}$ oder $\overline{A}$ enthalten ist.

Da hiermit alle möglichen Fälle erschöpft sind, so gelten diese Sätze auch umgekehrt.

Zusatz. Man setze $p+q+r=-s$, und schreibe der Symmetrie willen D statt P, so wird

$$pA+qB+rC+sD=0.$$

Weil $p+q+r+s=0$, so haben von diesen vier Coëfficienten entweder drei, z. B. p, q, r, einerlei Zeichen, und der vierte, s, das entgegengesetzte; oder zwei derselben, z. B. p und q, sind positiv, und die beiden andern, r und s, negativ. Im erstern Falle liegt D innerhalb des Dreiecks ABC; im letztern setze man $pA+qB=-rC-sD\equiv Z$, so ist Z der Durchschnitt der Geraden AB und CD und fällt, weil sowohl p mit q, als r mit s einerlei Zeichen hat, innerhalb der Endpunkte beider Geraden, und mithin jeder der vier Punkte

A, B, C, D ausserhalb des Dreiecks, welches die drei übrigen bilden.

*Rücksichtlich der gegenseitigen Lage von vier Punkten in einer Ebene können demnach im Allgemeinen zwei Fälle statt finden: entweder liegt einer der vier Punkte innerhalb, oder jeder liegt ausserhalb des durch die drei übrigen gebildeten Dreiecks. Im letztern Falle aber zeichnet sich unter den drei verschiedenen Arten, nach welchen die vier Punkte zu zwei Paaren genommen werden können, (*AB, CD; AC, BD; AD, BC*) die eine Art vor den beiden andern dadurch aus, dass die zwei durch diese zwei Paare bestimmten Geraden sich innerhalb der sie bestimmenden Punkte schneiden, dahingegen bei den zwei andern Paaren der Durchschnittspunkt immer ausserhalb fällt.*

Bestimmung eines Punktes im Raume.

§. 33. Hierzu sind vier nicht in einer Ebene enthaltene Fundamentalpunkte A, B, C, D erforderlich. Die sechs, sie zu zweien verbindenden Geraden AB, AC, AD, BC, BD, CD heissen Fundamentallinien, die vier, sie zu dreien verbindenden Ebenen BCD, CDA, DAB, ABC Fundamentalebenen, und die von diesen vier Ebenen begränzte Pyramide $ABCD$ die Fundamentalpyramide.

Der Ausdruck eines Punktes P im Raume hat alsdann die Form: $pA+qB+rC+sD$. Denn durch jede gegebene Werthe der Verhältnisse der Coëfficienten p, q, r, s ist auch der Punkt P immer und ohne Zweideutigkeit bestimmt. Und umgekehrt, ist P gegeben, so erhalten auch jene Verhältnisse immer und ohne Zweideutigkeit bestimmte Werthe. Es müssen sich nämlich

die Coëfficienten wie die Pyramiden $PBCD$, — $PCDA$, $PDAB$, — $PABC$ verhalten (§. 26, *b*). Die gegenseitigen Verhältnisse der letztern können daher ebenfalls als die Coordinaten von P bei dieser Bestimmung betrachtet werden.

§. 34. Die vier F.ebenen, in das Unendliche erweitert gedacht, begränzen eine dreiseitige Pyramide und zerlegen den übrigen unendlichen Raum in vierzehn Theile. Vier derselben sind unendliche Pyramiden, von denen jede zu ihrer Spitze eine der vier Spitzen der F.pyramide, und zu ihren Kanten die verlängerten Kanten dieser Spitze hat. Ihre Bezeichnungen seyen nach den Spitzen, an welche sie stossen: $\overline{\overline{A}}$, $\overline{\overline{B}}$, $\overline{\overline{C}}$, $\overline{\overline{D}}$. Vier andere Räume sind ebenfalls unendliche, aber abgestumpfte Pyramiden, über jeder Seitenfläche der Pyramide eine derselben. Sie werden nach den Seitenflächen, über welchen sie liegen, mit $\overline{\overline{BCD}}$, $\overline{\overline{CDA}}$, $\overline{\overline{DAB}}$, $\overline{\overline{ABC}}$ bezeichnet. Die sechs übrigen unendlichen Räume könnte man vierseitige Pyramiden nennen. Nur laufen ihre vier Seiten nicht in einer, sondern zwei Spitzen der F.pyramide zusammen, so dass jede mit der F.p. die zwischen diesen zwei Spitzen liegende Kante gemein, und die vier Seiten der F.p., welche in den zwei Spitzen zusammentreffen, über die Spitzen hinaus erweitert, zu Gränzen hat. Wir wollen diese Räume nach den mit der F.p. gemeinschaftlichen Spitzenpaaren durch $\overline{\overline{AB}}$, $\overline{\overline{AC}}$, $\overline{\overline{AD}}$, $\overline{\overline{BC}}$, $\overline{\overline{BD}}$, $\overline{\overline{CD}}$ ausdrücken; die F.pyramide endlich selbst durch $\overline{\overline{ABCD}}$.

Um die gegenseitige Lage der unendlichen Räume bequem auffassen zu können, denke man sich aus irgend einem Punkte der Pyramide mit einem unendlich grossen Halbmesser eine Kugel beschrieben, so wird jede

der vier Ebenen die Kugelfläche in einem grössten Kreise schneiden, und durch diese vier Kreise die Kugelfläche in vierzehn, den eben so viel unendlichen Räumen entsprechende, Theile getheilt werden. Von dieser Kugelfläche in Bezug auf die Pyramide Fig. 5. giebt Fig. 6. einen stereographischen Entwurf. Der mittlere Kreis stellt die Ebene BCD vor, der untere die Ebene CDA, von den beiden obern der rechte die Ebene DAB, der linke die Ebene ABC.

Es soll nun eben so, wie in §. 30. und §. 32., gezeigt werden, wie durch die gegenseitige Relation der Coëfficienten p, q, r, s der Theil des Raumes bestimmt wird, in welchem der Punkt $P \equiv pA + qB + rC + sD$ enthalten ist.

Haben erstlich q, r, s einerlei Vorzeichen, und sey $qB + rC + sD \equiv X$, also $pA + (q + r + s) X \equiv P$, so ist X der Durchschnitt der Geraden AP mit der Ebene BCD (§. 25.) und liegt innerhalb des Dreiecks BCD (§. 32.), und die Gerade AP geht durch die Räume $\overline{\overline{A}}$, $\overline{\overline{ABCD}}$, $\overline{\overline{BCD}}$. Ganz auf die Weise, wie in §. 32., wird nun auch hier bewiesen, dass der Punkt P liegt:

I. in $\overline{\overline{ABCD}}$, wenn p, q, r, s einerlei Zeichen haben;

II. in $\overline{\overline{BCD}}$, wenn $q + r + s > p$, und eben so
in $\overline{\overline{CDA}}$, wenn $r + s + p > q$
u. s. w.

III. in $\overline{\overline{A}}$, wenn $p > q + r + s$, und eben so
in $\overline{\overline{B}}$, wenn $q > r + s + p$
u. s. w.

nur dass auch hier bei den Formeln II. und III. die in

§. 32. gemachte Erinnerung in Betreff der Vorzeichen wiederholt werden muss.

Seyen ferner p und q positiv, r und s negativ, oder umgekehrt, und absolut $p+q > r+s$. Man setze $pA + qB \equiv M$ und $rC + sD \equiv N$, also $(p+q)\, M + (r+s)\, N \equiv P$, so liegt M in der F.linie AB zwischen A und B, und N in der F.linie CD zwischen C und D. Wie man bald wahrnimmt, ist folglich die Gerade MN mit dem zwischen M und N begriffenen Theile in der F.pyramide selbst, mit dem Theile über M hinaus in dem Raume $\overleftarrow{AB}$, und mit dem Theile über N hinaus in dem Raume $\overleftarrow{CD}$ enthalten. Da nun $p+q$ und $r+s$ entgegengesetzte Zeichen haben, und absolut $p+q > r+s$ ist, so liegt P in der Geraden MN, und zwar in dem über M hinaus sich erstreckenden Theile derselben, d. h. in dem Raume $\overline{\overline{AB}}$. P liegt also

$$\text{IV.} \begin{cases} \text{in } \overleftarrow{\overline{AB}}, \text{ wenn } p+q > r+s, \text{ und eben so} \\ \text{in } \overline{\overline{AC}}, \text{ wenn } p+r > q+s \\ \qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

mit demselben Zusatze in Betreff der Vorzeichen, wie vorhin.

In dem speciellen Falle, wo einer der vier Coëfficienten, z. B. $p = 0$ ist, fällt P in die F.ebene, BCD. Sind zwei Coëfficienten zugleich, z. B. p und $q = 0$, so liegt P in der F.linie CD; und wenn drei Coëfficienten, z. B. p, q und $r = 0$ sind, so fällt P mit dem F.punkte D zusammen.

Wenn endlich, ohne dass jeder Coëfficient einzeln $\neq 0$, die Summe aller $= 0$ ist, und daher entweder drei Coëfficienten z. B. q, r, s einerlei Zeichen, aber das entgegengesetzte von dem vierten p haben und ohne Rücksicht auf die Zeichen $q + r + s = p$ ist, oder zwei

Coëfficienten z. B. p, q positiv, die beiden andern r, s negativ sind und absolut $p+q=r+s$ ist, so liegt P von der F.pyramide unendlich entfernt. Die Richtung, nach welcher er liegt, wird im ersten Falle durch Parallelen mit der durch die Punkte A und $qB+rC+sD$ gelegten Geraden, und im zweiten durch Parallelen mit der Geraden durch die Punkte $pA+qB$ und $rC+sD$ bestimmt. Im ersten Falle liegt er also im Raume $\overline{\overline{A}}$ oder $\overline{\overline{BCD}}$, und im zweiten im Raume $\overline{\overline{AB}}$ oder $\overline{\overline{CD}}$.

Alle Sätze dieses §. gelten übrigens auch umgekehrt. Vergl. §. 32.

Zusatz. Man setze $p+q+r+s=-t$, so wird

$$pA+qB+rC+sD+tE=0,$$

wenn man noch der Symmetrie willen E für P schreibt. Da nun $p+q+r+s+t=0$, so haben von diesen fünf Coëfficienten entweder vier, z. B. p, q, r, s, einerlei Zeichen, und der fünfte t das entgegengesetzte, oder drei Coëfficienten, z. B. p, q, r, sind mit einerlei Zeichen, und die beiden übrigen s, t mit dem entgegengesetzten behaftet. Dem zufolge *giebt es rücksichtlich der gegenseitigen Lage von fünf Punkten im Raume*, eben so wie §. 32. Zus., *im Allgemeinen zwei Fälle. Im ersten liegt ein Punkt, E, innerhalb der Pyramide, von welcher die vier übrigen, A, B, C, D, die Spitzen sind.* Im zweiten Falle setze man $pA+qB+rC=-(sD+tE)$ $\equiv F$, so ist F der Durchschnitt der Ebene ABC mit der Geraden DE, und liegt sowohl innerhalb der Dreiecksfläche ABC, als auch innerhalb der Punkte D und E. Wie man bald sieht, *ist also in dem zweiten Falle jeder Punkt ausserhalb der von den vier übrigen gebildeten Pyramide enthalten. Zugleich aber zeichnet sich unter den zehn Geraden, welche die fünf*

Punkte zu zweien verbinden, die eine vor den übrigen dadurch aus, dass ihr Durchschnitt mit der Ebene durch die drei übrigen Punkte, sowohl innerhalb des Dreiecks dieser letztern, als auch innerhalb der zwei sie selbst bestimmenden Punkte fällt.

Veränderung der Fundamentalpunkte.

§. 35. Sey ein Punkt P in Bezug auf zwei, drei oder vier F.punkte $A, B, ..,$ je nachdem er in einer geraden Linie, in einer Ebene oder im Raume enthalten ist, auf die eben gezeigte Art gegeben. Es wird verlangt, den Ausdruck von P auf zwei, drei oder vier andere F.punkte $A_{,}, B_{,}, ..$ bezogen zu finden, vorausgesetzt, dass die letztern F.punkte in Bezug auf die erstern ebenfalls gegeben sind.

Offenbar ist diese Aufgabe der Veränderung der Axen eines gewöhnlichen Coordinatensystems analog. Man weiss, dass dieses Geschäft, — eines der wichtigsten in der analytischen Geometrie, — wenn auch mit keinen Schwierigkeiten verknüpft, doch nach den verschiedenen Fällen mancherlei Umsicht nöthig hat, und Anwendung von Formeln erfordert, die dem Gedächtnisse nicht immer zu Gebote stehen. Dagegen bedarf man zur Veränderung der F.punkte nur der einzigen, aus der Natur der Sache selbst fliessenden und auf jeden Fall anwendbaren Regel:

Sind die neuen F.punkte $A_{,}, B_{,}, ..,$ durch die alten $A, B, ..$ ausgedrückt, gegeben, so suche man umgekehrt die Werthe von $A, B, ..,$ durch $A_{,}, B_{,}, ..$ ausgedrückt. Die Substitution dieser Werthe in dem Ausdrucke von P, giebt das Verlangte.

Die Sache ist so einfach, dass folgendes Beispiel zur Erläuterung vollkommen hinreichen wird.

§. 36. **Beispiel.** Seyen in einer Ebene die neuen F.punkte $A_{\prime}$, $B_{\prime}$, $C_{\prime}$ die Mittelpunkte der Seiten des alten F.dreiecks ABC, $A_{\prime}$ der Mittelpunkt von BC, $B_{\prime}$ von CA, $C_{\prime}$ von AB; so hat man die Gleichungen (§. 30.):

$$2A_{\prime} = B + C,\ 2B_{\prime} = C + A,\ 2C_{\prime} = A + B,$$

woraus sogleich folgt:

$$A = B_{\prime} + C_{\prime} - A_{\prime},\ B = C_{\prime} + A_{\prime} - B_{\prime},\ C = A_{\prime} + B_{\prime} - C_{\prime}.$$

Ist nun der Ausdruck irgend eines Punktes P der Ebene in Bezug auf die alten F.punkte:

$$P \equiv pA + qB + rC,$$

so wird in Bezug auf die neuen:

$$P \equiv p(B_{\prime} + C_{\prime} - A_{\prime}) + q(C_{\prime} + A_{\prime} - B_{\prime}) + r(A_{\prime} + B_{\prime} - C_{\prime})$$

d. i. $P \equiv (q + r - p)A_{\prime} + (r + p - q)B_{\prime} + (p + q - r)C_{\prime}$.

Anmerkung. Man hat (§. 32.) gesehen, wie aus dem gegenseitigen Verhalten der Coëfficienten p, q, r beurtheilt werden kann, in welchem der sieben Felder, worein die Ebene durch die drei F.linien BC, CA, AB zerlegt wird, der Punkt P sich befindet. Auf eben die Weise wird man nun mittelst der Coëfficienten $q+r-p$, $r+p-q$, $p+q-r$, also ursprünglich auch mittelst p, q, r angeben können, in welchem der sieben Felder, worein die neuen F.linien $B_{\prime}C_{\prime}$, $C_{\prime}A_{\prime}$, $A_{\prime}B_{\prime}$, d. h. die Linien durch die Mittelpunkte der Seiten des F.dreiecks ABC, die Ebene theilen, der Punkt P enthalten ist.

Heissen diese Felder, analog der in §. 32. angewendeten Bezeichnung, $\overline{A_{\prime}B_{\prime}C_{\prime}}$, $\overline{B_{\prime}C_{\prime}}$, $\overline{A_{\prime}}$, u. s. w., so wird man ohne Schwierigkeit folgende Resultate finden:

Der Punkt P liegt

I. in $\overline{A_{\prime}B_{\prime}C_{\prime}}$, wenn p, q, r einerlei Zeichen haben, und in absolutem Sinne die Summe je zweier Coëfficienten grösser als der dritte ist;

II. in $\overline{B_{\prime}C_{\prime}}$, wenn ohne Rücksicht auf die Zeichen $p > q + r$; in $\overline{C_{\prime}A_{\prime}}$, wenn u. s. w.

III. in $\overline{A_{\prime}}$, wenn p ein von dem der beiden andern Coëfficienten verschiedenes Vorzeichen hat, und nächstdem ohne Rücksicht auf die Zeichen die Summe je zweier Coëfficienten grösser als der dritte ist; in $\overline{B_{\prime}}$, wenn u. s. w.

Durch die drei ursprünglichen F.linien $BC,..$ und die drei neuen $B,C,,..$ wird die Ebene in sechszehn Theile zerlegt, von denen vier Theile endlich und zwölf unendlich sind. In Verbindung der oben gegebenen Kennzeichen rücksichtlich der erstern F.linien mit den jetzt aufgestellten rücksichtlich der letztern lassen sich nun leicht die Kennzeichen für jedes dieser sechszehn Felder einzeln finden. Allein die weitere Ausführung hiervon, so wie auch den Beweis für die eben gegebenen Regeln, muss ich, um nicht zu weitläufig zu werden, den Lesern selbst überlassen.

Viertes Capitel.

Von Ausdrücken gerader Linien und Ebenen.

§. 37. Bezeichnen E und E' zwei Punkte, so ist $E+wE'$ der Ausdruck eines Punktes in der durch E und E' bestimmten geraden Linie, und zwar jedes beliebigen Punktes dieser Linie, wenn es frei steht, dem Verhältnisse $1:w$ jeden beliebigen Werth beizulegen (§. 29.). Man kann daher den Ausdruck $E+wE'$, sobald darin w als eine veränderliche Grösse genommen wird, den Ausdruck der geraden Linie EE' selbst nennen, indem die Construction desselben alle in dieser Linie begriffenen Punkte giebt.

I. Ausdrücke gerader Linien in einer Ebene.

§. 38. Seyen nun E und E' zwei Punkte einer Ebene; die F.punkte derselben heissen A, B, C, und auf diese bezogen sey:

$$eE=aA+bB+cC,\quad e'E'=a'A+b'B+c'C;$$

so wird, wenn man statt w die Veränderliche v einführt, so dass $w=\frac{ve'}{e}$;

$$E + wE' \equiv eE + ve'E' \equiv$$
$$(a + a'v) A + (b + b'v) B + (c + c'v) C.$$

Dieser letztere Ausdruck mit der Veränderlichen v ist also der Ausdruck einer Geraden, welche durch die zwei Punkte $aA + bB + cC$ und $a'A + b'B + c'C$ der Ebene geht, und folglich der allgemeine Ausdruck für eine gerade Linie in einer Ebene, weil die Ausdrücke der beiden Punkte von ganz allgemeiner Form sind.

§. 39. Zusätze. *a.* Eine gerade Linie in einer Ebene wird im Allgemeinen jede der drei F.linien BC, CA, AB der Ebene schneiden. Es geschehe dies resp. in den Punkten A', B', C'. Für diese Punkte der Linie sollen nun die speciellen Werthe der Veränderlichen v in dem Ausdrucke der Linie, und somit die Ausdrücke der Punkte selbst gefunden werden. — Da der Punkt A' zugleich in der F.linie BC liegt, so ist für ihn in dem Ausdrucke der Linie der Coëfficient von A, $a + a'v \equiv 0$ (§. 32.), folglich $v \equiv -\frac{a}{a'}$. Substituirt man diesen Werth in den Coëfficienten von B und C, so kommt: $A' \equiv (ab' - a'b) B - (ca' - c'a) C$. Setzt man noch der Kürze willen:

$$bc' - b'c \equiv \alpha,\ ca' - c'a \equiv \beta,\ ab' - a'b \equiv \gamma, \qquad (1)$$

so wird $(\gamma - \beta) A' \equiv \gamma B - \beta C,$
und eben so findet sich $(\alpha - \gamma) B' \equiv \alpha C - \gamma A,$ (2)
$(\beta - \alpha) C' \equiv \beta A - \alpha B.$

b. Da die drei Punkte A', B', C' in einer Geraden liegen, so muss auch zwischen ihnen allein eine Gleichung statt finden. In der That dividirt man die drei Gleichungen (2) resp. mit $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$, und addirt sie hierauf, so kommt:

$$\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right) A' + \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\alpha}\right) B' + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) C' \equiv 0.$$

c. Wenn man in dem Ausdrucke einer geraden Linie in einer Ebene, der Veränderlichen v einen solchen Werth giebt, dass die Summe der drei Coëfficienten null wird, so erhält man den Ausdruck für einen unendlich entfernten Punkt der Linie (§. 32). Nun ist jene Summe $= a + b + c + (a' + b' + c')\,v$; folglich, wenn man sie $= 0$ setzt: $v = -\frac{a + b + c}{a' + b' + c'}$. Diesen Werth von v in dem Ausdrucke substituirt, ergiebt sich der Coëfficient von A, $= \frac{a(a' + b' + c') - a'(a + b + c)}{a' + b' + c'} = \frac{\gamma - \beta}{a' + b' + c'}$ und eben so die Coëfficienten von B und C, $= \frac{\alpha - \gamma}{a' + b' + c'}$ und $\frac{\beta - \alpha}{a' + b' + c'}$. Hiernach wird, nachdem man zuvor jeden Coëfficienten mit $-(a' + b' + c')$ multiplicirt hat, der Ausdruck für den unendlich entfernten Punkt der Linie:

$$(\beta - \gamma)A + (\gamma - \alpha)B + (\alpha - \beta)C.$$

Man begreift leicht, dass dieses Verfahren auf die Entwickelung von $\frac{aA + bB + cC}{a + b + c} - \frac{a'A + b'B + c'C}{a' + b' + c'} = E - E'$ hinausläuft. $E - E'$ ist aber der Ausdruck des in der Geraden EE' unendlich entfernten Punktes. §30.

Weil A', B', C' ebenfalls Punkte der geraden Linie sind, so werden auch $B' - C'$, $C' - A'$, $A' - B'$ Ausdrücke des unendlich entfernten Punktes seyn und, nach A, B, C entwickelt, zu demselben Ausdrucke hinführen müssen. So ist z. B.

$$B' - C' = \frac{\gamma A - \alpha C}{\gamma - \alpha} - \frac{\alpha B - \beta A}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\alpha(\gamma - \beta)A - \alpha(\gamma - \alpha)B - \alpha(\alpha - \beta)C}{(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)}$$

$$= (\beta - \gamma)A + (\gamma - \alpha)B + (\alpha - \beta)C$$

wie vorhin.

Am einfachsten aber gelangt man zu diesem Ausdrucke durch Addition der Gleichungen (2). Diese giebt:

$$(\gamma-\beta)A'+(\alpha-\gamma)B'+(\beta-\alpha)C'=(\beta-\gamma)A+(\gamma-\alpha)B+(\alpha-\beta)C.$$

Da nun hierin zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens die Summe der Coëfficienten $=0$ ist, so sind auch die Ausdrücke auf der einen und andern Seite entweder $=0$, oder zeigen einen unendlich entfernten Punkt an. Ersteres kann aber nicht seyn, weil die drei Punkte A, B, C rechter Hand nicht in einer Geraden liegen, auch die Coëfficienten derselben nicht einzeln $=0$ sind (§. 27.). Mithin wird durch beide Ausdrücke ein unendlich entfernter Punkt dargestellt, und zwar der in der Geraden $A'B'C'$ enthaltene.

§. 40. Der allgemeine Ausdruck einer geraden Linie in einer Ebene lässt sich, seiner Allgemeinheit unbeschadet, auf eine weit einfachere Form zurückbringen. Er wurde erhalten, indem man die Ausdrücke irgend zweier Punkte der Linie nahm, und den einen derselben, mit einer Veränderlichen multiplicirt, dem andern hinzufügte. Da nun die Wahl dieser zwei Punkte durch nichts bedingt ist, so nehme man hierzu zwei von den Durchschnitten mit den F.linien selbst, indem die Ausdrücke der Durchschnitte nur aus zwei F.punkten zusammengesetzt sind. So geben z. B. die zwei Durchschnitte A' und B' mit einander verbunden, den Ausdruck der Linie:

$$\gamma A-\alpha C+x(\gamma B-\beta C)\equiv A+xB-\frac{\alpha+\beta x}{\gamma}C.$$

Zu demselben vereinfachten Ausdrucke kann man aber auch mittelst blos analytischer Operationen, durch

Einführung einer andern Veränderlichen, gelangen. In dieser Absicht setze man in dem allgemeinen Ausdrucke:

$$(a+a'v)A+(b+b'v)B+(c+c'v)C$$

zuerst $a+a'v=t$, so dass t die neue Veränderliche ist. Hierdurch wird $v=\frac{t-a}{a'}$, und

$$b+b'v=\frac{a'b-ab'+b't}{a'}=\frac{-\gamma+b't}{a'}$$

$$c+c'v=\frac{a'c-ac'+c't}{a'}=\frac{\beta+c't}{a'},$$

wenn wir zur Abkürzung wiederum die Buchstaben α, β, γ, in der bisherigen Bedeutung genommen, anwenden; und der Ausdruck erhält die Form:

$$tA-\frac{\gamma-b't}{a'}B+\frac{\beta+c't}{a'}C.$$

Man dividire ihn durch t und setze $\frac{1}{t}=u$, so wird er:

$$A+\frac{b'-\gamma u}{a'}B+\frac{c'+\beta u}{a'}C.$$

Man nehme nun $\frac{b'-\gamma u}{a'}$ zur Veränderlichen $=x$, so wird $u=\frac{b'-a'x}{\gamma}$ und

$$\frac{c'+\beta u}{a'}=\frac{c'\gamma+b'\beta}{a'\gamma}-\frac{\beta x}{\gamma}=-\frac{\alpha+\beta x}{\gamma},$$

weil immer $a'\alpha+b'\beta+c'\gamma=0$. Hierdurch verwandelt sich der Ausdruck in:

$$A+xB-\frac{\alpha+\beta x}{\gamma}C,$$

wie vorhin. — Noch etwas einfacher wird er, wenn man $-\frac{\alpha}{\gamma}=f$ und $-\frac{\beta}{\gamma}=g$ setzt:

$$A+xB+(f+gx)C,$$

wo nur noch zwei Constanten vorkommen.

§. 41. Aufgabe. Die Ausdrücke zweier gerader Linien in einer Ebene sind gegeben:

$$\text{I.}\quad A+xB+(a+bx)\,C,$$

$$\text{II.}\quad A+yB+(a'+b'y)\,C.$$

Den Ausdruck für den Schneidungspunkt der Linien und die Bedingungsgleichung für ihren Parallelismus zu finden.

Auflösung. Da durch I. jeder Punkt der einen, und durch II. jeder Punkt der andern Linie ausgedrückt wird, so verlangt die Aufgabe nichts anders, als, für x und y solche Werthe zu finden, für welche der durch I. ausgedrückte Punkt mit dem durch II. ausgedrückten identisch wird. Für diese Werthe von x und y müssen sich aber nach §. 24. *a.* verhalten:

$$1:x:a+bx=1:y:a'+b'y.$$

Hieraus folgt $x=y$, $a+bx=a'+b'y$ und $x=y = -\frac{a-a'}{b-b'}$. Diesen Werth für x oder y in I. oder II. substituirt, erhält man den gesuchten Ausdruck für den Schneidungspunkt:

$$(b-b')A-(a-a')B+(a'b-ab')\,C.$$

Ist die Summe der Coëfficienten dieses Ausdrucks $=0$, so liegt der den Linien gemeinschaftliche Punkt unendlich entfernt, d. h. die Linien sind sich parallel. Die Bedingungsgleichung für den Parallelismus der Linien I. und II. ist daher:

$$b-b'-a+a'+a'b-ab'=0.$$

Dieselbe Relation lässt sich auch noch folgenderweise erhalten. Für den unendlich entfernten Punkt der Linie I. ist: $1+x+a+bx=0$, also $x=-\frac{1+a}{1+b}$. Hierdurch wird der unendlich entfernte Punkt selbst:

$$(1)\quad (1+b)A-(1+a)B+(a-b)\,C.$$

Eben so findet sich der unendlich entfernte Punkt der Linie II.:

$$(2)\quad (1+b')A-(1+a')B+(a'-b')\,C.$$

Da nun zwei Parallellinien als solche angesehen werden können, die in einem unendlich entfernten Punkte sich schneiden, so wird bei stattfindendem Parallelismus der Punkt (1) mit dem Punkte (2) zusammenfallen und mithin sich verhalten müssen:

$$1+b:1+a:a-b=1+b':1+a':a'-b'.$$

Dies giebt die Bedingungsgleichungen:

$$\frac{1+a}{1+b}=\frac{1+a'}{1+b'} \quad \text{und} \quad \frac{1+a}{a-b}=\frac{1+a'}{a'-b'},$$

die unter sich und mit der vorhin gefundenen identisch sind.

§. 42. Aufgabe. Es sind die Ausdrücke dreier gerader Linien in einer Ebene gegeben:

$$A+xB+(a+bx)\,C,$$
$$A+yB+(a'+b'y)\,C,$$
$$A+zB+(a''+b''z)\,C.$$

Die Bedingungsgleichung zu finden, bei welcher sich die Linien in einem Punkte schneiden.

Auflösung. Hierzu ist nöthig, dass die gegebenen Ausdrücke für gewisse Werthe der Veränderlichen x, y, z einen und denselben Punkt darstellen können. Für diese Werthe muss also nach §. 24. *a.* seyn:

$$x=y=z$$
$$\text{und } a+bx=a'+b'y=a''+b''z.$$

Eliminirt man daraus x, y, z, so kommt:

$$a'b''-a''b'+a''b-ab''+ab'-a'b=0,$$

als die gesuchte Bedingungsgleichung.

§. 43. Aufgabe. Die Bedingungsgleichung zu finden, bei welcher drei durch ihre Ausdrücke gegebene Punkte einer Ebene

$$P \equiv aA + bB + C$$
$$P' \equiv a'A + b'B + C$$
$$P'' \equiv a''A + b''B + C$$

in einer Geraden liegen.

Auflösung. Sollen P, P', P'' in einer Geraden enthalten seyn, so muss es (§. 22. *c.*) drei solche Verhältnisszahlen k, k', k'' geben, dass

$$k(a+b+1)P + k'(a'+b'+1)P' + k''(a''+b''+1)P'' = 0$$

ist. Setzt man hierein P, P', P'' durch A, B, C ausgedrückt, und ordnet gehörig, so kommt:

$$(ak + a'k' + a''k'')A + (bk + b'k' + b''k'')B + (k + k' + k'')C = 0.$$

Da nun A, B, C nicht in gerader Linie liegen, so muss nach §. 27.

$$ak + a'k' + a''k'' = 0,\quad bk + b'k' + b''k'' = 0,\quad k + k' + k'' = 0$$

seyn. Aus den zwei ersten dieser Gleichungen folgt:

$$k : k' : k'' = a'b'' - a''b' : a''b - ab'' : ab' - a'b,$$

und hieraus in Verbindung mit der dritten:

$$a'b'' - a''b' + a''b - ab'' + ab' - a'b = 0,$$

als die gesuchte Bedingungsgleichung.

§. 44. Ich füge noch die Ausdrücke für einige specielle Lagen einer geraden Linie gegen das F.dreieck hinzu.

Geht die Linie durch zwei F.punkte selbst, z. B. durch A und B, so ist ihr Ausdruck: $A + \nu B$, der möglich einfachste.

Geht die Linie nur durch einen F.punkt z. B. A, so sey irgend ein anderer in ihr liegender Punkt $\equiv aA + bB + cC$. Der Ausdruck der Linie wird alsdann seyn:

$\nu A+aA+bB+cC=(\nu+a)A+bB+cC$, oder, wenn man die Veränderliche $\nu+a=x$ setzt:

$$xA+bB+cC.$$

Ist also die Veränderliche nur in einem der drei Coëfficienten enthalten, so gehört der Ausdruck einer durch diesen Punkt gehenden Geraden an. — Der Punkt, in welchem diese Gerade die F.linie BC schneidet, ist $\equiv bB+cC$. Für ihn selbst ist $x=0$, und für den Punkt A, $x=\infty$.

Läuft die Linie mit einer der F.linien z. B. mit BC parallel, so kann man sie als eine solche betrachten, welche BC in dem Punkte $B-C$ schneidet. Der allgemeine Ausdruck einer solchen ist daher: $aA+bB+cC+x(B-C)$, d. i.

$$aA+(b+x)B+(c-x)C.$$

Eine Parallele mit BC, welche zugleich durch A geht, hat den Ausdruck: $xA+B-C$. Eben so ist der Ausdruck einer Parallele mit AC durch B: $A+yB-C$. Für $x=1$ geht der erstere, und für $y=1$ der letztere, Ausdruck in $A+B-C$ über, welches mithin der Durchschnitt beider Parallelen, d. h. derjenige Punkt ist, welcher mit A, C, B die Spitzen eines Parallelogramms bildet. Vergl. §. 36.

II. Ausdrücke gerader Linien im Raume überhaupt.

§. 45. Seyen wiederum E und E' irgend zwei Punkte der Linie, und als Punkte des Raumes gedacht und auf die vier F.punkte A, B, C, D bezogen:

$$eE=aA+bB+cC+dD,$$

$$e'E'=a'A+b'B+c'C+d'D;$$

so wird der Ausdruck der Linie: $eE+\nu e'E'=$

$$(a+a'\nu)A+(b+b'\nu)B+(c+c'\nu)C+(d+d'\nu)D,$$

welches daher der allgemeine Ausdruck einer geraden Linie im Raume ist.

§. 46. Zusätze. *a.* Im Allgemeinen schneidet die Linie jede der vier F.ebenen; heissen diese Durchschnitte mit BCD, CDA, DAB, ABC resp. A', B', C', D'. Die Ausdrücke derselben ergeben sich aus dem der Linie auf ähnliche Art, wie §. 39. *a.* So muss z. B. für A', als einen Punkt in der Ebene BCD, der Coëfficient von A, d. i. $a+a'\nu=0$, folglich $\nu=-\frac{a}{a'}$ seyn. Diesen Werth von ν in den übrigen Coëfficienten substituirt, und zur Abkürzung

$$\left.\begin{array}{l} ab'-a'b=\alpha,\ ac'-a'c=\beta,\ ad'-a'd=\gamma \\ bc'-b'c=\delta,\ bd'-b'd=\varepsilon,\ cd'-c'd=\zeta \end{array}\right\} \quad (1)$$

gesetzt, erhält man:

$$\text{und eben so}\quad \left.\begin{array}{l} (\alpha+\beta+\gamma)A'=\alpha B+\beta C+\gamma D \\ (\delta+\varepsilon-\alpha)B'=\delta C+\varepsilon D-\alpha A \\ (\beta+\delta-\zeta)C'=\beta A+\delta B-\zeta D \\ (\gamma+\varepsilon+\zeta)D'=\gamma A+\varepsilon B+\zeta C \end{array}\right\} \quad (2)$$

b. Weil die vier Punkte A', B', C', D' in einer Geraden liegen, so muss zwischen je dreien derselben besonders eine Gleichung Statt haben. Um diejenige zu finden, welche zwischen B', C', D' obwaltet, multiplicire man die drei letzten der Gleichungen (2) resp. mit $-\zeta$, $-\varepsilon$, δ, addire sie hierauf, und es kommt:

$$\delta(\gamma+\varepsilon+\zeta)D'-\zeta(\delta+\varepsilon-\alpha)B'-\varepsilon(\beta+\delta-\zeta)C'$$
$$=(\alpha\zeta-\beta\varepsilon+\gamma\delta)A.$$

Da aber B', C', D' Punkte der geraden Linie sind, und der F.punkt A im Allgemeinen ausserhalb derselben liegt, so muss nach §. 27. der Coëfficient von A

$\alpha\zeta - \beta\varepsilon + \gamma\delta = \delta(\gamma + \varepsilon + \zeta) - \zeta(\delta + \varepsilon - \alpha) - \varepsilon(\beta + \delta - \zeta)$ $= 0$ seyn. Diese durch geometrische Betrachtung erhaltene Relation zwischen $\alpha, \beta .. \zeta$ bestätigt sich auch durch Rechnung. Denn multiplicirt man von den zwei aus (1) sehr leicht fliessenden Gleichungen $a\delta - b\beta + c\alpha = 0$, $a'\delta - b'\beta + c'\alpha = 0$, die erste mit d', die zweite mit d, und zieht hierauf die eine von der andern ab, so kommt, mit wiederholter Anwendung von (1), dasselbe Resultat.

Es ist demnach:

$$\zeta(\delta+\varepsilon-\alpha) B' + \varepsilon(\beta+\delta-\zeta) C' = \delta(\gamma+\varepsilon+\zeta) D'$$

u. eben so

$$\zeta(\alpha+\beta+\gamma) A' + \gamma(\beta+\delta-\zeta) C' = \beta(\gamma+\varepsilon+\zeta) D'$$

$$\gamma(\delta+\varepsilon-\alpha) B' + \alpha(\gamma+\varepsilon+\zeta) D' = \varepsilon(\alpha+\beta+\gamma) A'$$

$$\beta(\delta+\varepsilon-\alpha) B' + \alpha(\beta+\delta-\zeta) C' = \delta(\alpha+\beta+\gamma) A'$$

c. Um den Ausdruck des unendlich entfernten Punktes der Linie zu erhalten, hat man, wie §. 39. *c.*, im Ausdrucke der Linie die Summe der Coëfficienten $= 0$ zu setzen. Dies giebt $\nu = -\dfrac{a+b+c+d}{a'+b'+c'+d'}$, und hiermit nach gehöriger Reduction den Ausdruck des Punktes selbst:

$$(\alpha+\beta+\gamma) A + (\delta+\varepsilon-\alpha) B - (\beta+\delta-\zeta) C - (\gamma+\varepsilon+\zeta) D.$$

Denselben Ausdruck bekommt man auch durch Entwickelung von $A' - B'$, oder $A' - C'$, u. s. w., wenn man dabei die identische Gleichung $\alpha\zeta + \gamma\delta = \beta\varepsilon$ mit zu Hülfe nimmt. — Am kürzesten endlich gelangt man zu dem Ausdrucke, wenn man die Gleichungen (2) mit den Zeichen $+, +, -, -$ addirt, und hierauf eine ganz ähnliche Schlussart, wie in §. 39. *c.*, anwendet.

§. 47. Der allgemeine Ausdruck einer geraden Linie im Raume (§. 45.) lässt sich, ähnlicherweise wie in §. 40., dadurch vereinfachen, dass man statt den zwei willkührlich in der Linie genommenen Punkten E und E'

zwei von den Durchschnitten derselben mit den vier F.ebenen zu Grunde legt. So kann z. B. D', als ein Punkt der F.ebene ABC, $\equiv fA+gB+C$, und C', als ein Punkt der F.ebene ABD, $\equiv f'A+g'B+D$ gesetzt werden. Hiernach zieht sich der Ausdruck der Linie zusammen in:

$$(fx+f')A+(gx+g')B+xC+D.$$

Eben so, wie bei der geraden Linie in einer Ebene gezeigt wurde, kann dieser vereinfachte Ausdruck aus dem zusammengesetzteren auch durch analytische Umformungen hergeleitet werden. Da aber der hier zu nehmende Gang dem dortigen ganz ähnlich ist, so wollen wir uns dabei nicht aufhalten.

§. 48. Aufgabe. Die Ausdrücke zweier geraden Linien im Raume sind gegeben:

$$(ax+a')A+(bx+b')B+xC+D$$
$$(\alpha y+\alpha')A+(\beta y+\beta')B+yC+D.$$

Die Bedingungsgleichungen zu finden, wenn die Linien in einer Ebene liegen, und darin einander parallel sind.

Auflösung. Angenommen, dass die zwei Linien sich in einem Punkte begegnen, so müssen, eben für diesen Punkt, die Veränderliche x im ersten, und die Veränderliche y im zweiten Ausdrucke solche Werthe erhalten können, dass dadurch die zwei Ausdrücke identisch werden. Unter dieser Voraussetzung hat man nach §. 26. *a.* die Gleichungen:

1) $ax+a'=\alpha y+\alpha'$, 2) $bx+b'=\beta y+\beta$, 3) $x=y$.

Eliminirt man daraus x und y, so kommt:

$$(A)\quad \frac{a-\alpha}{a'-\alpha'}=\frac{b-\beta}{b'-\beta'},$$

als die Bedingungsgleichung, wenn die Linien einen Punkt gemein haben, mag dieser unendlich entfernt seyn, oder nicht; also überhaupt, wenn sich die Linien in einer Ebene befinden.

Soll nun überdies der den zwei Linien gemeinsame Punkt unendlich entfernt liegen, d. h. sollen die Linien einander parallel seyn, so müssen für die bestimmten Werthe, welche x und y für den gemeinsamen Punkt haben, die Summen der Coëfficienten in den Ausdrücken der Linien $=0$, also

4) $(a+b+1)x+a'+b'+1=0$, 5) $(\alpha+\beta+1)y+\alpha'+\beta'+1=0$

seyn. Man hat somit fünf Gleichungen 1)...5), welche für den Parallelismus zugleich bestehen müssen, von denen aber jede eine Folge der vier andern ist, so dass nach Elimination von x und y aus denselben nur zwei von einander unabhängige Gleichungen übrig bleiben. Die eine dieser Gleichungen stellt (A) vor. Um eine zweite zu erhalten, eliminire man x und y aus 3), 4), 5), und es kommt:

$$(B) \quad \frac{a+b+1}{a'+b'+1}=\frac{\alpha+\beta+1}{\alpha'+\beta'+1}.$$

(A) und (B) sind folglich die zum Parallelismus der beiden Linien erforderlichen Bedingungsgleichungen.

III. Ausdrücke für Ebenen.

§. 49. Die Lage einer Ebene wird durch irgend drei Punkte derselben bestimmt, die nicht in gerader Linie liegen. Seyen diese Punkte, auf die F.punkte des Raums A, B, C, D bezogen:

$$eE=aA+bB+cC+dD$$
$$e'E'=a'A+b'B+c'C+d'D$$
$$e''E''=a''A+b''B+c''C+d''D.$$

Jeder Punkt aber, der mit E, E', E'' in einer Ebene liegt, hat nach §. 24. *b.* einen Ausdruck von der Form $eE + e'vE + e''wE''$, wo v und w alle beliebigen Werthe haben können. Substituirt man darin die F.punkte, so kommt:

I. $(a + a'v + a''w)A + (b + b'v + b''w)B + (c + c'v + c''w)C + (d + d'v + d''w)D.$

Dies ist also, v und w als Veränderliche genommen, der auf die F.punkte bezogene Ausdruck jedes Punktes der Ebene, oder kürzer, der allgemeine Ausdruck der Ebene selbst.

§. 50. Zusätze. *a.* Im Allgemeinen wird von der Ebene jede der sechs F.linien geschnitten. Man begreift sogleich, dass, um den Ausdruck eines solchen Durchschnitts zu erhalten, man in dem Ausdrucke der Ebene v und w so zu bestimmen hat, dass die Coëfficienten der beiden F.punkte, durch welche die geschnittene F.linie nicht geht, gleich Null werden.

Um dieses auf die kürzeste Weise zu bewerkstelligen, setze man die Coëfficienten der vier F.punkte

$$1)\begin{cases} a + a'v + a''w = p, \\ b + b'v + b''w = q, \\ c + c'v + c''w = r, \\ d + d'v + d''w = s, \end{cases}$$

und somit den Ausdruck der Ebene selbst:

$$\text{II.}\quad pA + qB + rC + sD.$$

Man multiplicire nun die vier Gleichungen 1) resp. mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, addire sie hierauf und setze:

$$2)\begin{cases} \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0, \\ \alpha a' + \beta b' + \gamma c' + \delta d' = 0, \\ \alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' + \delta d'' = 0, \end{cases}$$

so ist auch 3) $\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s = 0,$

eine Gleichung zwischen den Coëfficienten des Ausdrucks, in welcher $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Zahlen vorstellen, deren gegenseitiges Verhältniss mittelst der Gleichungen 2) aus den Constanten des Ausdrucks gefunden werden kann. *) Diese Gleichung besteht für alle beliebigen Werthe der Veränderlichen v und w, und vertritt daher in Verbindung mit dem Ausdrucke II. die Stelle des Ausdrucks I.

Nach dem Obigen sind nun für den Durchschnitt der Ebene mit AB die Coëfficienten von C und D, also r und s, $=0$ zu setzen. Hierdurch wird $\alpha p+\beta q=0$, mithin $p:q=\beta:-\alpha$, und der Ausdruck des Durchschnittspunktes $\equiv pA+qB\equiv\beta A-\alpha B$. Eben so leicht finden sich die Ausdrücke auch für die übrigen Durchschnitte, und man bekommt, wenn man den Durchschnitt mit AB durch (AB), den mit AC durch (AC), u. s. w. bezeichnet, nachstehende sechs Gleichungen:

*) Dies geschieht am einfachsten folgendergestalt. — Man addire die Gleichungen 2), nachdem man sie zuvor resp. mit k, k', k'' multiplicirt hat, und setze zur Bestimmung dieser neu eingeführten Hülfsgrössen:

$$ck+c'k'+c''k''=0,$$
$$dk+d'k'+d''k''=0,$$

so wird:

$$\alpha(ak+a'k'+a''k'')+\beta(bk+b'k'+b''k'')=0.$$

Hieraus folgt weiter:

$$k:k':k''=c'd''-c''d':c''d-cd'':cd'-c'd,$$
$$\alpha:\beta=(bk+b'k'+b''k''):-(ak+a'k'+a''k'').$$

Substituirt man nun in letzterer Proportion die Verhältnisswerthe von k, k', k'' aus der erstern und setzt zur Abkürzung

$$bc'd''-bc''d'+b'c''d-b'cd''+b''cd'-b''c'd=(bcd),$$

die eben so aus $c, d, a, c', d', \ldots$ zusammengesetzte Function $=(cda)$, u. s. w., so verhält sich

$$\alpha:\beta=(bcd):-(cda),$$

und überhaupt:

$$\alpha:\beta:\gamma:\delta=(bcd):-(cda):(dab):-(abc).$$

$(\alpha-\beta)\,(AB)=\alpha B-\beta A,\qquad (\beta-\gamma)\,(BC)=\beta C-\gamma B,$

$(\alpha-\gamma)\,(AC)=\alpha C-\gamma A,\qquad (\beta-\delta)\,(BD)=\beta D-\delta B,$

$(\alpha-\delta)\,(AD)=\alpha D-\delta A,\qquad (\gamma-\delta)\,(CD)=\gamma D-\delta C.$

b. Aus diesen Gleichungen ergeben sich folgende, zwischen den Durchschnitten selbst statt findende, Relationen. Zuerst zwischen je dreien, die in einer und derselben F.ebene und mithin in gerader Linie liegen: §39, b.

$$\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta}\right)(CD)+\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\beta}\right)(BD)+\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)(BC)=0,$$

$$\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\alpha}\right)(AD)+\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\gamma}\right)(AC)+\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta}\right)(CD)=0,$$

$$\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)(AB)+\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\delta}\right)(BD)+\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\alpha}\right)(AD)=0,$$

$$\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)(BC)+\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}\right)(AC)+\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)(AB)=0,$$

Da ferner alle sechs Durchschnitte in einer Ebene enthalten sind, so muss auch zwischen je vieren, welche nicht in einer Geraden liegen, eine Gleichung bestehen. Diese Gleichungen sind:

$$\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)(AB)+\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)(BC)+\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta}\right)(CD)+\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\alpha}\right)(AD)=0,$$

und eben so noch zwei andere,

die eine zwischen (AB), (BD), (CD), (AC),
die andere zwischen (AC), (BC), (BD), (AD).

c. Im Allgemeinen schneidet die Ebene jede der vier F.ebenen. Der Ausdruck einer solchen Durchschnittslinie, z. B. der in *BCD* liegenden, wird gefunden, wenn man in dem Ausdrucke der Ebene den Coëfficienten von A, $a+a'v+a''w=0$ setzt, und mittelst der dadurch zwischen v und w hervorgehenden Relation die eine dieser Veränderlichen aus den Coëfficienten der drei übrigen F.punkte eliminirt. — Noch leichter ge-

langt man zum Zweck mit Hülfe des Ausdrucks II. und der zugehörigen Gleichung 3), die sich, für $p = o$, auf

$$\text{II}^*.\quad qB + rC + sD \quad \text{und } 3^*)\ \beta q + \gamma r + \delta s = o$$

reduciren, und in dieser verkürzten Form dem Ausdrucke einer Geraden, der Durchschnittslinie mit BCD nämlich, gleich zu achten sind. Denn eliminirt man s mittelst 3*) aus II*., und nimmt hierauf $\frac{r}{q} = x$ zur Veränderlichen, so kommt:

$$\delta B + \delta x C - (\beta + \gamma x) D,$$

derselbe Ausdruck, den man auch durch Verbindung der in die F.ebene BCD fallenden Durchschnittspunkte (BD) und (CD) erhält.

d. Der unendlich entfernte Punkt dieser Linie ist:

$(\gamma - \delta) B + (\delta - \beta) C + (\beta - \gamma) D.$ Eben so sind: $(\delta - \alpha) C + (\alpha - \gamma) D + (\gamma - \delta) A$

$$(\alpha - \beta) D + (\beta - \delta) A + (\delta - \alpha) B$$

$$(\beta - \gamma) A + (\gamma - \alpha) B + (\alpha - \beta) C$$

die unendlich entfernten Punkte der Durchschnittslinien der Ebene mit den F.ebenen CDA, DAB, ABC.

§. 51. Auf ähnliche Art, wie in §. 40. und §. 47. bei der geraden Linie geschah, lässt sich auch der allgemeine Ausdruck der Ebene einfacher darstellen, indem man zu den drei sie bestimmenden Punkten drei von den sechs Durchschnitten mit den F.linien wählt. Seyen diese (AD), (BD), (CD), so kommt, wenn man dafür ihre Werthe aus §. 50. *a.* nimmt, sie mit den Veränderlichen x und y verbindet und gehörig ordnet:

$$\delta A + \delta x B + \delta y C - (\alpha + \beta x + \gamma y) C,$$

oder noch einfacher, wenn man $-\frac{\alpha}{\delta}=f$, $-\frac{\beta}{\delta}=g$, $-\frac{\gamma}{\delta}=h$ setzt:

$$A+xB+yC+(f+gx+hy)\,D.$$

Dasselbe Resultat kann man auch auf analytischem Wege mittelst des Ausdrucks II. und der zugehörigen Gleichung 3) erhalten, wenn man aus ersterem mittelst der letztern, s eliminirt, und hierauf $q:p$ und $r:p$ zu den Veränderlichen x und y nimmt.

§. 52. Wenn in dem Ausdrucke einer Ebene die zwei Veränderlichen solche Werthe erhalten, dass die Summe der Coëfficienten null wird, so gilt der Ausdruck für einen unendlich entfernten Punkt der Ebene. Setzt man daher die Summe der Coëfficienten $=0$, und eliminirt mittelst dieser Gleichung die eine der beiden Veränderlichen, so bekommt man einen Ausdruck, welcher alle unendlich entfernten Punkte der Ebene in sich begreift. In diesem Ausdrucke wird, unabhängig von der darin noch vorkommenden Veränderlichen, die Summe der Coëfficienten immer null seyn, so dass sowohl der von der Veränderlichen freie Theil dieser Summe, als der in sie multiplicirte, jeder für sich null ist. Ein solcher Ausdruck wird daher seiner Form nach einer geraden Linie angehören, welche durch zwei unendlich entfernte Punkte der Ebene gelegt ist, oder, wenn man will, er wird der Ausdruck einer unendlich entfernten Geraden seyn, von der sich aber eben so wenig bestimmen lässt, nach welcher Gegend der Ebene hin sie liegt, als man bei dem unendlich entfernten Punkte in einer Geraden die Seite der Geraden, nach welcher er liegt, angeben kann.

Zur Erläuterung diene der im vorigen §. gefundene vereinfachte Ausdruck. Die Summe seiner Coëfficienten $=0$ gesetzt, giebt $y=\frac{\delta-\alpha+(\delta-\beta)x}{\gamma-\delta}$. Eliminirt man hiermit y in dem Ausdrucke, so kommt nach einer leichten Reduction:

$$(\gamma-\delta)A+(\gamma-\delta)xB+[\delta-\alpha+(\delta-\beta)x]\,C+[\alpha-\gamma+(\beta-\gamma)x]\,D$$

der Ausdruck der unendlich entfernten Linie der Ebene. Die in ihm durch die Veränderliche x verbundenen Punkte sind nach §. 50. *d.* die unendlich entfernten in den Durchschnitten der Ebene mit BCD und CDA. Auf erstern Punkt reducirt sich der Ausdruck für $x=\infty$, auf letztern für $x=0$. Setzt man ferner $x=-\frac{\delta-\alpha}{\delta-\beta}$ und $=-\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}$, so ergeben sich die Ausdrücke der unendlich entfernten Punkte in den Durchschnitten mit DAB und ABC.

§. 53. **Aufgabe.** Die Ausdrücke zweier Ebenen sind gegeben:

I. $A+vB+wC+(a+bv+cw)\,D$,

II. $A+xB+yC+(a'+b'x+c'y)\,D$.

Den Ausdruck ihrer Durchschnittslinie und die Bedingungsgleichungen zu finden, wenn sie sich parallel sind.

Auflösung. Für einen gemeinschaftlichen Punkt der beiden Ebenen ist:

1) $v=x$, 2) $w=y$, 3) $a+bv+cw=a'+b'x+c'y$;

mithin, wenn man x und y aus diesen drei Gleichungen eliminirt:

$$a-a'+(b-b')v+(c-c')w=0.$$

Dies ist demnach die Relation, welche zwischen den Veränderlichen der Ebene I. für jeden Punkt, den sie mit II. gemein hat, statt findet. Eliminirt man also mittelst dieser Relation aus I. die eine der beiden Veränderlichen, z. B. w, so erhält man den Ausdruck der Durchschnittslinie:

$$(c-c')A+(c-c')vB-[a-a'+(b-b')v]\ C$$
$$-[ac'-a'c+(bc'-b'c)v]\ D.$$

Findet sich in diesem Ausdrucke die Summe der Coëfficienten, unabhängig von v, $=0$, so ist die den beiden Ebenen gemeinschaftliche Linie unendlich entfernt, d. h. die Ebenen sind sich parallel. Die Bedingungsgleichungen für den Parallelismus sind daher:

$$c-c'-a+a'-ac'+a'c=0$$
$$c-c'-b+b'-bc'+b'c=0.$$

Ohne vorher den Ausdruck für die Durchschnittslinie entwickelt zu haben, lassen sich diese Gleichungen auch folgendergestalt leicht finden. Für einen unendlich entfernten Punkt

der Ebene I. ist: 4) $1+a+(1+b)v+(1+c)w=0$,
— — II. — 5) $1+a'+(1+b')x+(1+c')y=0$.

Sollen sich nun die Ebenen parallel seyn, so müssen alle gemeinschaftlichen Punkte derselben unendlich entfernt liegen, oder analytisch ausgedrückt: alle Werthe der Veränderlichen v, w, x, y, welche den Gleichungen 1), 2), 3) Genüge leisten, müssen auch die Gleichungen 4), 5) erfüllen. Da aber jede dieser fünf Gleichungen eine Folge der vier übrigen ist, und mithin eine derselben, z. B. 3), immer unberücksichtigt bleiben kann, so muss, wenn man aus 1), 2) und 5), x und y eliminirt, nächst 4) zugleich

6) $1+a'+(1+b')v+(1+c')w=0$

seyn, ohne dass dadurch v und w bestimmte Werthe erhalten. Es müssen folglich die Gleichungen 4) und 6) nicht zwei verschiedene, sondern eine und dieselbe Relation zwischen v und w darstellen, und mithin die Coëfficienten der einen in denselben Verhältnissen zu einander stehen, wie die der andern. Dies giebt:

$$\frac{1+a}{1+a'}=\frac{1+b}{1+b'}=\frac{1+c}{1+c'},$$

welches demnach die Bedingungsgleichungen für den Parallelismus sind, die von den vorhin gefundenen sich nur der Form nach unterscheiden.

§. 54. Aufgabe. Die Ausdrücke einer geraden Linie und einer Ebene sind gegeben:

$$(\alpha u+\alpha')A+(\beta u+\beta')B+uC+D,$$
$$A+vB+wC+(a+bv+cw)D.$$

Den Ausdruck für ihren Schneidungspunkt, so wie die Bedingungsgleichungen ihrer Coincidenz und ihres Parallelismus zu finden.

Auflösung. Für diejenigen Werthe der Veränderlichen, bei welchen diese Ausdrücke einen und denselben Punkt darstellen, muss sich verhalten:

$$\alpha u+\alpha':\beta u+\beta':u:1=1:v:w:a+bv+cw.$$

Dies giebt: $(\alpha u+\alpha')v=\beta u+\beta'$, $(\alpha u+\alpha')w=u$,

$$(\alpha u+\alpha')(a+bv+cw)=1;$$

und wenn man aus diesen drei Gleichungen v und w eliminirt:

1) $a(\alpha u+\alpha')+b(\beta u+\beta')+cu=1$, oder $nu=m$, wenn man $a\alpha+b\beta+c=n$, $1-a\alpha'-b\beta'=m$ setzt.

Den hieraus entspringenden Werth von u in dem Ausdrucke der Geraden substituirt, erhält man den, der

Geraden und der Ebene gemeinschaftlichen, Punkt, also im Allgemeinen den Durchschnittspunkt:

$$(\alpha m+\alpha' n)A+(\beta m+\beta' n)B+mC+nD.$$

Soll die Gerade mit der Ebene zusammenfallen, soll also jeder Punkt der erstern zugleich ein Punkt der letztern seyn, so muss für jeden Werth von u in dem Ausdrucke der Geraden die Gleichung 1) bestehen. Es muss daher seyn:

$$a\alpha+b\beta+c=0, \quad 1-a\alpha'-b\beta'=0,$$

die Bedingungsgleichungen für die Coincidenz, wodurch, was man noch bemerke, in dem Ausdrucke des Durchschnittspunktes die Coëfficienten sämmtlicher vier F.punkte null werden.

Ist die Gerade der Ebene parallel, so liegt der ihnen gemeinschaftliche Punkt unendlich entfernt. Es muss daher für diesen Fall der sich aus 1) ergebende Werth von u zugleich der Gleichung

$$2) \quad \alpha u+\alpha'+\beta u+\beta'+u+1=0$$

Genüge leisten. Die Bedingungsgleichung des Parallelismus ist folglich das Resultat der Elimination von u aus den Gleichungen 1) und 2):

$$\frac{a\alpha'+b\beta'-1}{a\alpha+b\beta+c}=\frac{\alpha'+\beta'+1}{\alpha+\beta+1}.$$

§. 55. Aufgabe. Die Ausdrücke dreier Ebenen sind gegeben:

$$\text{I.} \quad A+tB+uC+(a+bt+cu)\,D$$
$$\text{II.} \quad A+vB+wC+(a'+b'v+c'w)\,D$$
$$\text{III.} \quad A+xB+yC+(a''+b''x+c''y)\,D.$$

Den Ausdruck ihres Durchschnittspunktes, so wie die Bedingungsgleichungen für die dabei möglichen speciellen Fälle zu finden.

Auflösung. Für den Punkt, welchen diese drei Ausdrücke gemeinschaftlich darstellen, muss seyn:

$$t = v = x, \quad u = w = y,$$

$$a + bt + cu = a' + b'v + c'w = a'' + b''x + c''y.$$

Man setze daher

$$1) \begin{cases} a + bt + cu = s, \text{ so ist auch} \\ a' + b't + c'u = s \\ a'' + b''t + c''u = s. \end{cases}$$

Diese drei Gleichungen resp. mit $c' - c''$, $c'' - c$, $c - c'$ multiplicirt und hierauf addirt, ergiebt sich, wenn man noch

$$b'c'' - b''c' + b''c - bc'' + bc' - b'c \text{ mit } (bc),$$

und die eben so aus $c, a, c', \ldots$ und $a, b, a', \ldots$ gebildeten Functionen mit (ca) und (ab) bezeichnet:

$$(bc)\ t = (ca)$$

und auf gleiche Art $(bc)\ u = (ab)$.

Die hieraus fliessenden Werthe für t und u in I. substituirt, kommt der Ausdruck des Durchschnittspunktes:

$$(bc)A + (ca)B + (ab)\ C + [a(bc) + b\,(ca) + c\,(ab)]\ D.$$

Man bemerke dabei, dass, wenn man die Function

$$2) \begin{cases} a\,(bc) + b\,(ca) + c\,(ab) = (abc) \text{ setzt, auch} \\ a'(bc) + b'(ca) + c'(ab) = (abc) \text{ und} \\ a''(bc) + b''(ca) + c''(ab) = (abc) \text{ ist.} \end{cases}$$

Dies folgt unmittelbar aus den Gleichungen 1), wenn man darin für t und u die gefundenen Werthe substituirt. — Uebrigens ist die Function (abc) mit der in §. 50. *a.* Anmerk. eben so bezeichneten dieselbe.

Ist nun in dem Ausdrucke des Durchschnittspunktes die Summe der Coëfficienten

$$3)\quad (1+a)(bc)+(1+b)(ca)+(1+c)(ab)=0,$$

so liegt dieser Punkt unendlich entfernt. Im Allgemeinen sind alsdann die drei Durchschnittslinien der Ebenen mit einander parallel, so dass die drei Ebenen ein unendlich langes dreiseitiges Prisma einschliessen.

Es kann aber auch seyn, dass die drei Ebenen sich in einer und derselben Geraden schneiden, oder mit andern Worten, dass die Durchschnittslinie zweier Ebenen in die dritte Ebene fällt. Sucht man demnach den Ausdruck der Durchschnittslinie von zweien der Ebenen, und hierauf den Ausdruck des Punktes, in welchem diese Linie die dritte Ebene schneidet, so muss für gegenwärtigen Fall in dem letztern Ausdrucke, d. h. in dem für den Durchschnittspunkt aller drei Ebenen, jeder der vier Coëfficienten $=0$ seyn (§. 54.). Die Bedingungsgleichungen, unter welchen sich die drei Ebenen in einer und derselben Geraden schneiden, sind demnach:

$$(bc)=0,\quad (ca)=0,\quad (ab)=0,$$

von denen im Allgemeinen jede eine Folge der beiden andern ist, wie sich leicht aus den Gleichungen 2) ergiebt.

Anmerkung. Setzt man $a+1=a_{,}$, $b+1=b_{,}$, $c+1=c_{,}$, $a'+1=a'_{,}$, u. s. w. und bezeichnet die eben so aus $b_{,}$, $c_{,}$, $b'_{,}$, ... zusammengesetzte Function, als es (bc) aus $b, c, b', \ldots$ ist, mit $(b_{,}c_{,})$, u. s. w.: so sieht man bald, dass $(b_{,}c_{,})=(bc)$, $(c_{,}a_{,})=(ca)$, $(a_{,}b_{,})=(ab)$. Hierdurch wird die Bedingungsgleichung dafür, dass sich die drei Ebenen in Parallellinien schneiden: $a_{,}(b_{,}c_{,})+b_{,}(c_{,}a_{,})+c_{,}(a_{,}b_{,})=0$, also vermöge der ersten Gleichung in 2):

$$(a_{,}b_{,}c_{,})=0,$$

wenn man die aus (abc) gleicherweise hervorgehende Function durch $(a_{,}b_{,}c_{,})$ ausdrückt. Man würde dies Resultat unmittelbar gefunden haben, hätte man, ohne vorher den Durchschnittspunkt zu suchen, die Summen der Coëfficienten in den Ausdrücken der Ebenen einzeln $=0$ gesetzt.

§. 56. Den Beschluss dieses Capitels soll eine Zusammenstellung von Ausdrücken machen, welche geraden Linien und Ebenen in einigen besondern Lagen gegen die F.pyramide zukommen. Von der Richtigkeit dieser Ausdrücke wird man sich leicht überzeugen, wenn man jeden derselben in den, von der oder den Veränderlichen freien, Theil und den oder die damit behafteten Theile zerlegt, und hierauf diese, bei Geraden zwei, bei Ebenen drei, Theile einzeln betrachtet. Vergl. §. 44.

I. Ausdruck einer Geraden, welche

1) die gegenüberstch. F.linien AB und CD schneidet:

$$axA+xB+cC+D;$$

2) die F.linie AB schneidet und mit CD parallel läuft:

$$axA+xB-C+D;$$

3) durch A geht und mit BCD parallel ist:

$$xA+bB-(1+b)C+D;$$

4) AB schneidet und mit BCD parallel ist:

$$axA+(b+x)B-(1+b)C+D.$$

II. Ausdruck einer Ebene, welche

1) durch BC gelegt ist und mit AD parallel läuft:

$$A+xB+yC-D;$$

2) durch A geht und mit BCD parallel ist:

$$A+xB+yC-(x+y)D;$$

3) mit AB und CD parallel ist:

$$(a+x)A-xB+yC+(1-y)D.$$

Die Durchschnitte dieser Ebene mit den übrigen F.linien sind:

$aA+C$, für $x=0$, $y=1$; $aB+C$, für $x=-a$, $y=1$,
$aA+D$, für $x=0$, $y=0$; $aB+D$, für $x=-a$, $y=0$.

Hiernach ist der Ausdruck einer Geraden, welche in einer, mit AB und CD parallelen, Ebene liegt und zugleich AC und BD schneidet:

$$axA + aB + xC + D.$$

Fünftes Capitel.

Von Ausdrücken krummer Linien in Ebenen.

§. 57. Wenn in dem Ausdrucke eines Punktes in einer Ebene, $pA + qB + rC$, die Coëfficienten p, q, r, beliebig gegebene Functionen einer veränderlichen Grösse v sind, und man für v nach und nach alle Werthe substituirt, bei welchen die Exponenten der Verhältnisse $p : q : r$ reell bleiben, so werden die Punkte aller der somit erhaltenen Ausdrücke, construirt, eine Linie in der Ebene bilden, die im Allgemeinen krumm, und nur dann gerade seyn wird, wenn, wie im vorigen Capitel, die Functionen von linearer Form sind, oder doch durch Umformung darauf gebracht werden können. Heisse daher der Ausdruck $pA + qB + rC$ mit der Veränderlichen v, *der Ausdruck der Linie* ~~selbst~~.

§. 58. Wir wollen uns gegenwärtig auf die Curven beschränken, in deren Ausdrücken die Coëfficienten *rationale* Functionen der Veränderlichen sind. Da es nun bei einem Ausdrucke nicht auf die absoluten Werthe seiner Coëfficienten, sondern bloss auf die gegenseitigen Verhältnisse derselben ankommt, so können wir, sollten der eine, oder zwei, oder alle drei Coëfficienten gebrochene Functionen seyn, dieselben durch Multipli-

cation mit dem Generalnenner immer in ganze Functionen verwandeln. Wir setzen daher nicht weniger allgemein als vorhin, dass die Coëfficienten ganze rationale Functionen der Veränderlichen seyn sollen.

§. 59. Die einfachsten Curven sind hiernach diejenigen, in deren Ausdrücken nächst der ersten, noch die zweite Potenz von v vorkömmt, und die wir, der sonst gewöhnlichen Terminologie gemäss, Linien der zweiten Ordnung nennen wollen. Ihr allgemeiner Ausdruck wird seyn:

I. $(a+a'v+a''v^2)A+(b+b'v+b''v^2)B+(c+c'v+c''v^2)C,$

vorausgesetzt, dass die drei Coëfficienten keinen gemeinschaftlichen linearen Factor haben, oder durch Einführung einer andern Veränderlichen auf lineäre Form gebracht werden können *).

Mit Ausnahme dieser beiden Fälle giebt die Construction des Ausdrucks immer eine krumme Linie.

§. 60. Um jetzt diese Curven näher zu untersuchen, wollen wir zuerst ihren allgemeinen Ausdruck auf einfachere Formen zu bringen suchen.

Dieses kann erstlich durch Einführung einer andern Veränderlichen geschehen.

Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich der Coëfficient, bei welchem die Vereinfachung beginnen soll, in Factoren zerlegbar ist, oder nicht.

*) Das erstere fände z. B. statt, wenn $a=b=c=0$. Denn alsdann wäre v ein gemeinschaftlicher Factor, und nach Division mit demselben würden die Coëfficienten: $a'+a''v$, $b'+b''v$, $c'+c''v$, welche nur einer Geraden zukommen. Das letztere würde unter andern der Fall seyn für $a'=b'=c'=0$, wo, $v^2=w$ gesetzt, der Ausdruck sich gleichfalls in den für eine Gerade verwandeln würde.

Sey daher für den ersten Fall der Coëfficient von A:

$$a + a'\nu + a''\nu^2 = a''(\alpha + \nu)(\alpha' + \nu).$$

Man setze $\alpha' + \nu = w$, so wird er:

$$a''[(\alpha - \alpha')w + w^2],$$

und wenn man mit $a''w^2$ dividirt, und $\frac{1}{w} = x$ setzt:

$$1 + (\alpha - \alpha')x.$$

Man nehme jetzt $1 + (\alpha - \alpha')x = y$ zur neuen Veränderlichen, und man sieht bald, dass die Coëfficienten von B und C, nachdem darin die Veränderlichen w, x, y, auf die angezeigte Weise von ν und von einander abhängig, der Reihe nach eingeführt worden, zuletzt als trinomische Functionen von y hervorgehen, und folglich nur sechs unbestimmte Constanten im Ausdrucke noch übrig seyn werden. Man dividire nun den Ausdruck durch eine der beiden von y freien Constanten, z. B. durch diejenige, welche in dem Coëfficienten von B vorkömmt, und nehme, y durch diese Constante dividirt $= z$, zur neuen Veränderlichen, so reducirt sich der Ausdruck auf nachstehende Form:

II. $$zA + (1 + \beta' z + \beta'' z^2)B + (\gamma + \gamma' z + \gamma'' z^2)C,$$

wo nur noch fünf unbestimmte Constanten vorhanden sind.

Sey zweitens der Coëfficient von A nicht in Factoren zerlegbar, so dass man

$$a + a'\nu + a''\nu^2 = a''[\alpha^2 + (\alpha' + \nu)^2] = a''\alpha^2(1 + w^2)$$

setzen kann, wo $w = \frac{\alpha' + \nu}{\alpha}$ eine neue Veränderliche ist. Führt man dieselbe auch in den beiden andern Coëfficienten ein, und dividirt sodann den Ausdruck durch $a''\alpha^2$, so erhält er die Form:

$$(1 + w^2)A + (g + g'w + g''w^2)B + (h + h'w + h''w^2)C.$$

Um jetzt noch eine der hier vorkommenden sechs Constanten wegzuschaffen, setze man $w = \frac{1 - dx}{d + x}$, wo x die neue Veränderliche, und d eine noch zu bestimmende Constante ist. Da nun immer $(1 - dx)^2 + (d + x)^2 = (1 + d^2)(1 + x^2)$, so wird der Ausdruck, nachdem man in ihm diese Substitution vorgenommen, und hierauf mit $\frac{(d+x)^2}{1+d^2}$ multiplicirt hat:

$$(1 + x^2) A + (\beta + \beta' x + \beta'' x^2) B + (\gamma + \gamma' x + \gamma'' x^2) C,$$

ein Ausdruck, dessen sechs Constanten aus denen des vorigen und aus d zusammengesetzt sind. Man bestimme nun d so, dass eine dieser Constanten einen bestimmten Werth erhalte. So findet sich z. B. nach gehöriger Entwickelung:

$$\beta' = \frac{g' + 2(g - g'')d - g'd^2}{1 + d^2}$$

Man kann daher d immer so annehmen, dass $\beta' = 0$ wird. Hierdurch reducirt sich der letztere Ausdruck auf:

$$\text{III.} \quad (1 + x^2) A + (\beta + \beta'' x^2) B + (\gamma + \gamma' x + \gamma'' x^2) C,$$

wo ebenfalls nur fünf unbestimmte Constanten noch übrig sind.

§. 61. Geringer lässt sich auf diesem Wege die Anzahl der Constanten nicht machen. Wohl aber kann man, mit Verzichtleistung auf die Allgemeinheit der Lage der Curve gegen das F.dreieck, noch einfachere Ausdrücke durch Annahme anderer F.punkte erhalten; — eben so, als wie der Ausdruck für eine gerade Linie am einfachsten dadurch wird, dass man irgend zwei in der Geraden selbst liegende Punkte zu F.punkten wählt. — In der That nehme man statt A, B, C drei andere F.punkte $A_{,}, B_{,}, C_{,}$, die von den erstern dergestalt abhängen, dass:

$$a_{,}A_{,} = aA + bB + cC,$$
$$b_{,}B_{,} = a'A + b'B + c'C,$$
$$c_{,}C_{,} = a''A + b''B + c''C,$$

so geht der Ausdruck I. über in folgenden:

$$\text{IV.}\quad a_{,}A_{,} + b_{,}vB_{,} + c_{,}v^2 C_{,},$$

oder noch einfacher, wenn man ihn mit $\frac{c_{,}}{b_{,}^2}$ multiplicirt, und hierauf $\frac{c_{,}}{b_{,}} v = w$ und $\frac{a_{,}c_{,}}{b_{,}^2} = \alpha$ setzt:

$$\text{V.}\quad \alpha A_{,} + wB_{,} + w^2 C_{,}.$$

Aber selbst noch diese einzige Constante α lässt sich durch Einführung einer andern Veränderlichen und anders gewählte F.punkte entfernen. Man setze in dieser Absicht $w = m + nx$, wo x die neue Veränderliche, und m, n zwei noch zu bestimmende Constanten sind, so wird der Ausdruck:

$$\alpha A_{,} + (m + nx) B_{,} + (m^2 + 2mnx + n^2x^2)\, C_{,},$$

oder $(\alpha + m + m^2) A_{,,} + (n + 2mn) xB_{,,} + n^2x^2 C_{,}$,

wenn man für $A_{,}$, $B_{,}$ zwei andere F.punkte $A_{,,}$, $B_{,,}$ nimmt, so dass

$$\alpha A_{,} + mB_{,} + m^2 C_{,} \equiv A_{,,} \text{ und } nB_{,} + 2mnC_{,} \equiv B_{,,}.$$

Man bestimme jetzt m und n so, dass

$$\alpha + m + m^2 = n + 2mn = n^2.$$

Alsdann lässt sich der letztere Ausdruck hiermit dividiren und gewinnt die möglichst einfache Gestalt:

$$A_{,,} + xB_{,,} + x^2 C_{,}.$$

Es findet sich aber aus jenen Gleichungen:

$$n = \pm \sqrt{\frac{4\alpha - 1}{3}},\quad m = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{4\alpha - 1}{3}}.$$

Soll demnach diese Umbildung des Ausdrucks möglich seyn, so wird erfordert, dass $\alpha > \frac{1}{4}$.

Ist dagegen $\alpha < \frac{1}{4}$, so setze man:

$$-\alpha - m - m^2 = n + 2mn = n^2.$$

Alsdann wird $n = \pm\sqrt{\frac{1-4\alpha}{5}}$, $m = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-4\alpha}{5}}$.

und der Ausdruck reducirt sich auf:

$$-A_{,,} + xB_{,,} + x^2 C_{,}.$$

Wenn aber endlich $\alpha = \frac{1}{4}$, so ist keine von beiden Umformungen anwendbar, indem dann n^2 und folglich auch die beiden andern Coëfficienten $\alpha + m + m^2$ und $n + 2mn = 0$ werden.

Wir sehen hieraus, dass der allgemeine Ausdruck für die Linien der zweiten Ordnung immer auf eine dieser drei Formen gebracht werden kann:

VI. $A + xB + x^2 C$,

VII. $-A + xB + x^2 C$,

VIII. $\frac{1}{4}A + xB + x^2 C$;

je nachdem nämlich in V. $\alpha >, <, = \frac{1}{4}$, folglich in IV. $4a_{,}c_{,} >, <, = b_{,}^2$; d. h. nachdem die zwei Factoren der Coëfficientensumme in IV. $(a_{,} + b_{,}v + c_{,}v^2)$, folglich auch der Coëfficientensumme in I., (weil beide Ausdrücke einerlei Summe haben,) entweder unmöglich, oder möglich und ungleich, oder möglich und gleich sind.

§. 62. Diesen drei verschiedenen Fällen, welche bei der Coëfficientensumme im Ausdrucke für eine Linie der zweiten Ordnung statt finden können, entsprechen nun eben so viel wesentlich verschiedene Formen dieser Curven.

1) Da im Ausdrucke VI. die Coëfficientensumme keine möglichen Factoren hat, mithin für keinen möglichen Werth von x, $= 0$ werden kann, so kann auch die zugehörige Curve keinen unendlich entfernten Punkt haben, sondern muss auf einen endlichen Raum beschränkt seyn.

Um die Gestalt dieser Curve und ihre Lage gegen das F.dreieck noch genauer kennen zu lernen, denke man sich x von $-\infty$ durch o bis $+\infty$ stetig fortschreitend, nenne P den die Curve beschreibenden Punkt und p, q, r, wie in §. 32., die Coëfficienten der F.punkte; und es erhellet folgendes:

Für $x = -\infty$ verschwinden p und q gegen r, und P fällt mit C zusammen. Indem hierauf x, als negative Grösse, von $-\infty$ bis o abnimmt, sind p und r positiv, q negativ, und absolut $p + r > q$. P tritt folglich von C in das Feld $\overline{CA}$ und geht darin fort bis A, wo mit x zugleich r und q verschwinden. Wird sodann x positiv, und nimmt zu bis $+\infty$, so sind p, q, r immer positiv, und P geht in dem Felde $\overline{ABC}$ von A bis C zurück. — Zugleich ist klar, dass, da P beim Durchgange durch A und C auf einerlei Seite der F.linien AB sowohl als BC bleibt, die Curve diese Linien in A und C berühren wird. Siehe Fig. 7.

2) Im Ausdrucke VII. ist die Coëfficientensumme in zwei mögliche Factoren zerlegbar, nämlich

$$-1 + x + x^2 = (x + k)(x - l),$$

wo $k = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$, $l = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Sie wird daher, indem x von $-\infty$ zu $+\infty$ fortgeht, zu zweien Malen $= 0$, für $x = -k$ und $= l$. Die Curve selbst hat folglich zwei unendlich entfernte Punkte: $-A - kB + k^2C$ und $-A + lB + l^2C$; d. h. sie erstreckt sich nach zwei, durch diese Ausdrücke bestimmten, Richtungen in das Unendliche.

Um auch hier den Gang der Curve näher zu erforschen, so bemerke man zuvor, dass die Coëfficientensumme positiv ist von $x = -\infty$ bis $-k$, wo daher $r > p + q$, und von l bis ∞, wo $q + r > p$; negativ von $x = -k$ bis o, wo $p + q > r$, und von o bis l, wo $p > q + r$. — Ich brauche wohl kaum zu erinnern, dass diese Formeln zwischen p, q, r in demselben absoluten Sinne, wie die Formeln II. und III. in §. 32. zu nehmen sind. —

Von $x = -\infty$ bis $-k$, geht demnach der Punkt P von C durch $\overline{C}$ in das Unendliche fort. — Er erscheint hierauf wieder nach entgegengesetzter Richtung in $\overline{AB}$, wo er, von $x = -k$ bis o, bis A sich bewegt. — Von $x = 0$ bis l, tritt er von A in $\overline{A}$, berührt dabei AB, und verliert sich in $\overline{A}$ zum zweiten Male in dem Unendlichen. — Aus diesem kehrt er zurück im Felde $\overline{BC}$, und

gelangt darin, von $x = l$ bis ∞, bis zum Punkte C, von welchem er ausgegangen war, und wo er zugleich die F.linie BC berührt. — Siehe Fig. 8.

Im Ausdrucke VIII. ist die Summe der Coëfficienten $= (\frac{1}{2} + x)^2$, und wird daher nur einmal $= 0$, für $x = -\frac{1}{2}$. Die zugehörige Curve wird sich mithin bloss nach der einen, durch den Ausdruck $\frac{1}{4}A - \frac{1}{2}B + \frac{1}{4}C \equiv A - 2B + C$ bestimmten, Richtung in das Unendliche erstrecken.

In der That geht sie, von $x = -\infty$ bis $-\frac{1}{2}$, von C durch $\overline{CA}$ in das Unendliche, kehrt aber, von $x = -\frac{1}{2}$ bis o, in demselben Felde wieder zurück, geht, AB berührend, durch A in $\overline{ABC}$ und darin, von $x = 0$ bis ∞, bis C, BC berührend, zurück. — Siehe Fig. 9.

§. 63. Es springt in die Augen, dass die drei jetzt betrachteten Curven keine andern, als die Ellipse, Hyperbel und Parabel sind, dass folglich der Ausdruck I. immer einem Kegelschnitte oder einer Linie der zweiten Ordnung, im gewöhnlichen Sinne genommen, angehört. Der strenge Beweis dafür wird weiter unten folgen. Gegenwärtig noch einige allgemeine Bemerkungen über die Lage dieser Curven gegen das F.dreieck.

1) Jeder Coëfficient im Ausdrucke für eine solche Curve ist im Allgemeinen ein Trinomium und lässt sich daher entweder in zwei mögliche Factoren zerlegen, oder nicht. Sey nun z. B. der Coëfficient von $A, = a + a'v + a''v^2 = a''(v - \alpha)(v - \alpha')$, also zerlegbar, wenn α und α' mögliche Grössen bedeuten: so wird für $v = \alpha$ sowohl, als für $v = \alpha'$ der Coëfficient von $A, = 0$, und der Ausdruck reducirt sich auf die beiden andern F.punkte B und C, also auf Ausdrücke von Punkten in der F.linie BC, d. h. die Curve wird für $v = \alpha$ und $v = \alpha'$ diese F.linie schneiden. Ist dagegen der Coëfficient von A

nicht zerlegbar, so reducirt sich der Ausdruck für keinen Werth von ν auf B und C allein, und die Curve schneidet BC nicht. — Wenden wir das Gesagte eben so auf die Coëfficienten von B und C an, so folgt, dass jede der drei F.linien von der Curve entweder in zwei Punkten oder in keinem geschnitten wird.

2) Sind die zwei Factoren eines Coëfficienten nicht nur möglich, sondern auch gleich, so fallen die zwei Schneidungspunkte in einen zusammen, d. h. die Curve berührt die F.linie, welche durch die beiden andern F.punkte geht. Wenn also z. B. der Coëfficient von $A, = a''(\nu - \alpha)^2$ ist, so wird, für $\nu = \alpha$, BC eine Tangente der Curve seyn.

3) Sind die Coëfficienten zweier F.punkte in mögliche Factoren auflösbar, und haben sie dabei einen Factor gemeinschaftlich, so werden durch Nullsetzung dieses Factors beide Coëfficienten zugleich $= 0$, und der Ausdruck reducirt sich allein auf den dritten F.punkt, so dass dieser ein Punkt der Curve ist.

§. 64. Aus diesen Sätzen fliesst leicht die allgemeine Gültigkeit folgender Ausdrücke für einige besonders merkwürdige Verbindungen unserer Curven mit dem F.dreieck.

1) Eine Linie der zweiten Ordnung, welche durch die drei F.punkte geht, hat den Ausdruck:

$$a(\nu - \beta)(\nu - \gamma)A + b(\nu - \gamma)(\nu - \alpha)B + c(\nu - \alpha)(\nu - \beta)C.$$

Durch A geht die Curve für $\nu = \alpha$, durch B für $\nu = \beta$, und durch C für $\nu = \gamma$.

2) Der Ausdruck einer Linie der zweiten Ordnung, welche die drei F.seiten berührt, ist:

$$a(\nu - \alpha)^2 A + b(\nu - \beta)^2 B + c(\nu - \gamma)^2 C.$$

Die drei Berührungspunkte finden sich, indem man nach und nach $\nu = \alpha, \beta, \gamma$ setzt, und sind daher

mit der Seite BC : $b(\alpha-\beta)^2 B + c\,(\alpha-\gamma)^2\, C$,

— — — CA : $c(\beta-\gamma)^2\, C + a\,(\beta-\alpha)^2 A$,

— — — AB : $a(\gamma-\alpha)^2 A + b\,(\gamma-\beta)^2 B$.

Man wird leicht wahrnehmen, dass diese drei Punkte zugleich diejenigen sind, in denen die drei Geraden, von den Spitzen A, B, C nach dem Punkte

$$\frac{a}{(\beta-\gamma)^2} A + \frac{b}{(\gamma-\alpha)^2} B + \frac{c}{(\alpha-\beta)^2} C$$

gezogen, die gegenüberstehenden Seiten BC, CA, AB treffen.

Man erhält somit den bekannten schönen Satz:

Wird um eine Linie der zweiten Ordnung ein Dreieck beschrieben, so schneiden sich die drei Geraden, welche die Spitzen des Dreiecks mit den gegenüberliegenden Berührungspunkten verbinden, in einem Punkte.

3) Für eine Linie der zweiten Ordnung, welche durch die zwei F.punkte A und C geht und daselbst die F.seiten AB und CB berührt, ist der Ausdruck:

$$a(\nu-\alpha)^2 A + b\,(\nu-\alpha)\,(\nu-\gamma)\,B + c\,(\nu-\gamma)^2\, C.$$

Denn für $\nu = \gamma$ und $\nu = \alpha$ reducirt sich der Ausdruck auf A und C, so dass A und C Punkte der Curve sind. In diesen berührt sie aber zugleich die F.seiten AB und CB, weil die Coëfficienten von C und A Quadrate sind.

Jeder dieser drei Ausdrücke kann durch Einführung einer andern Veränderlichen auf einfachere Formen gebracht werden. Die Vereinfachung der beiden erstern wird in der Folge gezeigt werden. Um den dritten einfacher darzustellen, darf man ihn nur mit $(\nu-\alpha)^2$ di-

vidiren, $\frac{v-\gamma}{v-\alpha}$ zur neuen Veränderlichen nehmen, und man gewahrt bald, dass er sich dadurch auf die Form IV. reducirt.

§. 65. Der Ausdruck IV. bietet uns ein sehr leichtes Mittel zur Construction dieser Curven dar.

Man setze $aA+bvB+cv^2C\equiv P$, wo also P einen beliebigen Punkt der Curve vorstellt. Man setze ferner:

$$bB+cC=gG \text{ und } bB+cvC=xX$$
$$aA+bB=hH \qquad aA+cvC=yY$$
$$aA+bvB=zZ.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$P\equiv aA+vxX=cv^2C+zZ$$
$$aA+xX=bB+yY=hH+cvC$$
$$bvB+yY=cvC+zZ=aA+gvG.$$

Mithin ist X (Fig. 10.) der Durchschnitt von BC mit AP, Z von AB mit CP; die drei Geraden AX, BY, CH schneiden sich in einem Punkte $\equiv aA+xX=$ etc., welcher R heisse; und eben so AG, BY, CZ in einem Punkte $\equiv bvB+yY=$ etc., welcher Q heisse, d. i. der Durchschnitt von AX und CH, und der Durchschnitt von AG und CZ liegen mit B in einer Geraden. — Hieraus ergiebt sich folgende Construction:

Man bestimme in BC und AB die Punkte $G\equiv bB+cC$ und $H\equiv aA+bB$, und ziehe die Geraden AG und CH. Man lege hierauf durch C nach beliebiger Richtung eine Gerade CZ, welche AG in Q schneide, ziehe BQ, welche CH in R schneide, und ziehe AR, welche CZ in P schneide; so ist P ein Punkt der Curve.

Dies lässt sich auch folgenderweise, als Theorem, darstellen.

Wenn um drei feste Punkte A, B, C, die nicht in einer Geraden liegen, sich drei Gerade AX, BY, CZ bewegen, dergestalt, dass der Durchschnitt R der ersten mit der zweiten eine durch den dritten Punkt gehende Gerade CH, und der Durchschnitt Q der zweiten mit der dritten eine durch den ersten Punkt gehende Gerade AG beschreibt, so beschreibt der Durchschnitt P der ersten mit der dritten einen Kegelschnitt, welcher durch den ersten und dritten Punkt geht, und daselbst die von diesen Punkten nach dem zweiten Punkte gezogenen Geraden AB und BC berührt (§. 64. 3.).

Anmerkung. Der Durchschnitt *P* bewegt sich auch dann noch in einem Kegelschnitte, wenn die von den Durchschnitten *R* und *Q* beschriebenen Geraden nicht durch *C* und *A* gehen, sondern irgend eine andere Lage haben. Unter dieser allgemeinern Form haben den Satz die Geometer Maclaurin und Braikenridge, wie es scheint, jeder für sich, entdeckt. In des letztern *Exercitatio geometr. de descriptione linear. curv.* ist er die *Prop. I.* Robert Simson berichtet in der Vorrede zu seinen *Sect. con.*, diesen Satz vorlängst von Macl. mitgetheilt erhalten zu haben, und drückt ihn in der Sprache der ältern Geometrie so aus: *Si a tribus punctis datis, quae non sunt in recta linea, ducantur tres rectae lineae, et ipsarum intersectiones duae tangant rectas positione datas; tanget reliqua intersectio sectionem conicam positione datam.*

§. 66. Wie Linien in Ebenen nach den ihnen zugehörigen Ausdrücken in Ordnungen eingetheilt werden können, geht schon aus der, zu Anfange dieses Capitels gegebenen, Erklärung für die Linien der zweiten Ordnung hinlänglich hervor. Angenommen, dass jeder der drei Coëfficienten eine ganze rationale Function der Veränderlichen ist, dass die Coëfficienten nicht einen ihnen allen gemeinschaftlichen Factor haben, und dass die höchste im Ausdrucke vorkommende Potenz der Verän-

derlichen durch Einführung einer andern Veränderlichen auf keinen niedrigern Grad gebracht werden kann: so werde eine Linie der *n*ten Ordnung beigezählt, wenn die im Ausdrucke vorkommende Veränderliche bis auf den *n*ten Grad steigt. Hiernach ist also der allgemeine Ausdruck für eine Gerade in §. 38., zugleich der allgemeine für die Linien der ersten Ordnung. Der Ausdruck I. in §. 59. war der allgemeine für die Linien der zweiten Ordnung. Bei den Linien der dritten Ordnung wird die allgemeine Form der Coëfficienten: $a + a'v + a''v^2 + a'''v^3$, seyn, u. s. w.

§. 67. Der Vortheil, welchen die gewöhnliche Eintheilung der Linien in Ordnungen, nach den ihnen zukommenden Gleichungen zwischen Abscissen und Ordinaten, gewährt, dass nämlich die Ordnung einer Linie von den Aenderungen der Axen des Coordinatensystems ganz unabhängig ist, derselbe Vortheil findet auch hier statt, indem bei jedweder Veränderung der F.punkte die Ordnung der Linie doch immer dieselbe bleibt. Denn um eine Linie, welche in Beziehung auf die F.punkte A, B, C gegeben ist, auf beliebige andere F.punkte $A_{,}$, $B_{,}$, $C_{,}$ bezogen darzustellen, hat man nur in dem Ausdrucke der Linie, für A, B, C Ausdrücke von der Form $a_{,}A_{,} + b_{,}B_{,} + c_{,}C_{,}$ zu substituiren, wo $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$ beständige Grössen sind. Vergl. §. 35.

§. 68. In dem Ausdrucke einer Linie von der *n*ten Ordnung lässt sich jeder der drei Coëfficienten, z. B. der Coëfficient von C, in höchstens n verschiedene lineäre und reelle Factoren auflösen, kann also für höchstens n verschiedene Werthe der Veränderlichen null werden. Für diese n Werthe der Veränderlichen reducirt sich der Ausdruck auf die beiden andern F.punkte A und B allein, d. i. auf Punkte der Curve in der F.linie AB. Eine

F

Linie der nten Ordnung kann mithin keine der F.linien in mehr, als höchstens n Punkten, schneiden. Da nun durch Veränderung der F.punkte jede andere in der Ebene der Curve liegende Gerade zu einer F.linie gemacht werden kann, durch Veränderung der F.punkte aber die Ordnung der Curve nicht geändert wird, so folgt, dass die Zahl der Punkte, in denen eine Curve von einer Geraden geschnitten wird, nicht grösser seyn kann, als die Zahl der Ordnung, zu welcher die Curve gehört.

§. 69. Die Anzahl der Constanten, welche in einem Coëfficienten des allgemeinen Ausdrucks einer Linie von der 1sten, 2ten, 3ten, . . . nten Ordnung vorkommen, ist $= 2, 3, 4, \ldots n+1$; und daher die Anzahl der Constanten in allen drei Coëfficienten, $= 6, 9, 12, \ldots 3n+3$. So lange man diese $3n+3$ Constanten in dem allgemeinen Ausdrucke einer Linie der nten Ordnung unbestimmt lässt, bleibt auch die Linie hinsichtlich ihrer Gestalt, Grösse und Lage gegen das F.dreieck unbestimmt. Ohne aber diese Unbestimmtheit in etwas zu mindern, kann man immer durch Einführung einer neuen Veränderlichen die Zahl der unbestimmten Constanten um 4 geringer machen. — So wurden die 6 Constanten in dem allgemeinen Ausdrucke für die gerade Linie (§. 38.) auf 2 (§. 40.), und die 9 Constanten bei den Linien der zweiten Ordnung (§. 59.) auf 5 herabgebracht (§. 60.). — Um jetzt die Allgemeinheit dieses Satzes darzuthun, substituire man in dem allgemeinen Ausdrucke von der nten Ordnung

$$(a+a'v+\ldots+a^{(n)}v^n)A+(b+\ldots+b^{(n)}v^n)B+(c+\ldots+c^{(n)}v^n)C,$$

$\dfrac{\zeta x+\eta}{x+\vartheta}$ für v, wo x die neue Veränderliche, und ζ, η, ϑ noch zu bestimmende Constanten sind, multiplicire den

Ausdruck, um ihn von den Brüchen zu befreien, mit $(x+\vartheta)^n$, und ordne hierauf die drei Coëfficienten nach den Potenzen von x. Man wird somit einen Ausdruck von derselben Form wie vorhin erhalten:

$$(\alpha+\alpha'x+..+\alpha^{(n)}x^n)\,A+(\beta+..+\beta^{(n)}x^n)\,B+(\gamma+..+\gamma^{(n)}x^n)\,C,$$

in welchem die $3n+3$ Constanten $\alpha, \alpha', .. \alpha^{(n)}$, $\beta, .. \beta^{(n)}$ $\gamma, .. \gamma^{(n)}$ bekannte Functionen der $3n+3$ vorigen $a, a', ... c^{(n)}$ und der drei neuen ζ, η, ϑ sind. Man dividire nun den solchergestalt umgeänderten Ausdruck durch eine seiner Constanten, z. B. durch α, so kommt an die Stelle von α die Einheit, die $3n+2$ übrigen werden die vorigen, durch α dividirt, und man kann jetzt die drei von der Gestalt und Lage der Curve ganz unabhängigen Grössen ζ, η, ϑ so bestimmen, dass eben so viel der $3n+2$ übrigen Constanten bestimmte numerische Werthe erhalten, folglich nur $3n-1$ unbestimmte Constanten noch übrig bleiben; — nicht noch weniger, weil in der für die Veränderliche v gemachten Substitution, $\frac{\zeta x+\eta}{x+\vartheta}$, nicht mehr als drei willkührliche Constanten eine Stelle finden können.

§. 70. Hiermit lässt sich zugleich die Frage beantworten: Wieviel nach Belieben genommener Punkte gegeben seyn müssen, damit eine durch sie beschriebene Linie der nten Ordnung vollkommen bestimmt sey. Soll nämlich der Punkt $fA+gB+hC$ in der Linie $(\alpha+\alpha'x+..)\,A+(\beta+\beta'x+..)\,B+(\gamma+\gamma'x+..)\,C$ liegen, so hat man nach §. 24. a. die zwei Gleichungen:

$$\frac{\alpha+\alpha'x+..}{f}=\frac{\beta+\beta'x+..}{g}=\frac{\gamma+\gamma'x+..}{h},$$

aus denen, nach Elimination von x, die dazu nöthige Relation zwischen den Constanten im Ausdrucke der

Linie und den Coëfficienten im Ausdrucke des Punktes hervorgeht. Eben so ergiebt sich für jeden neuen Punkt, durch den die Linie gehen soll, eine neue Relation dieser Art. Da nun im allgemeinen Ausdrucke einer Linie der nten Ordnung die Anzahl der Constanten immer auf $3n - 1$ gebracht werden kann, zur Bestimmung von $3n - 1$ Grössen aber eben so viel Gleichungen zwischen diesen Grössen erforderlich sind, so folgt, dass durch $3n - 1$ willkührlich genommene Punkte im Allgemeinen immer eine und nicht mehr als eine Linie der nten Ordnung beschrieben werden kann.

Eine Linie der 1sten Ordnung ist demnach durch 2 Punkte, der 2ten durch 5, der 3ten durch 8, der 4ten durch 11, u. s. w. vollkommen bestimmt.

Nur also bei der ersten und zweiten Ordnung stimmt in dieser Hinsicht die neue Eintheilung der Linien in Ordnungen mit der bisher bekannten Eintheilung überein. Denn bei letzterer ist eine Linie der 3ten Ordnung erst durch 9 Punkte, eine Linie der 4ten Ordnung erst durch 14 Punkte, und überhaupt eine Linie der nten Ordnung durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte bestimmt, also durch $\frac{1}{2}n(n+3) - (3n-1) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Punkte mehr, als bei der neuen Eintheilung, ein Unterschied, der nur für $n = 1$ und $n = 2$ verschwindet. Der Grund dieses Unterschieds liegt darin, dass, wie wir in der Folge sehen werden, zwar jedem Ausdrucke von der dritten oder einer höhern Ordnung eine Gleichung von der ebensovielten Ordnung entspricht, aber nicht umgekehrt jede Gleichung von einer höhern Ordnung, als der zweiten, in einen Ausdruck mit rationalen Coëfficienten umgewandelt werden kann.

§. 71. Die Art und Weise, nach welcher wir (§. 61.) den allgemeinen Ausdruck für eine Linie der zweiten

Ordnung bloss durch Einführung anderer F.punkte auf eine sehr einfache Form zurückbrachten, lässt sich auch bei Ausdrücken für Linien höherer Ordnungen anwenden, nur dass dann die Zahl der festen Punkte, auf welche der bewegliche, die Curve beschreibende Punkt bezogen wird, bei jeder höhern Ordnung um eins sich vermehrt. Verfährt man nämlich, wie dort, auch bei den höhern Potenzen von v und setzt:

$$a'''A + b'''B + c'''C = d_{,}D_{,},$$

$$a''''A + b''''B + c''''C = e_{,}E_{,},$$

u. s. w., so wird der allgemeine Ausdruck einer Linie der dritten Ordnung:

$$a_{,}A_{,} + b_{,}vB_{,} + c_{,}v^2 C_{,} + d_{,}v^3 D_{,};$$

der vierten Ordnung:

$$a_{,}A_{,} + b_{,}vB_{,} + c_{,}v^2 C_{,} + d_{,}v^3 D_{,} + e_{,}v^4 E_{,};$$ u. s. w.

Diese höchst einfachen Ausdrücke sind insbesondere von Nutzen, um durch Fortsetzung des Verfahrens, nach welchem in §. 65. die Linien der zweiten Ordnung construirt wurden, Linien jeder höhern Ordnung zu beschreiben. — Seyen $A, B, C, D, E \ldots$ (Fig. 11.) die in dem zu construirenden Ausdrucke

$$aA + bvB + cv^2 C + dv^3 D + ev^4 E + \ldots$$

enthaltenen Punkte. Man ziehe die Geraden AB, BC, CD, $DE, \ldots$, und nehme darin die Punkte:

$$aA + bB,\ bB + cC,\ cC + dD,\ dD + eE,$$ u. s. w.

Sey ferner B' ein beliebiger Punkt der Geraden AB, den man $\equiv aA + bvB$ setze, so lässt sich hieraus nach §. 65. in BC der Punkt $C' \equiv bB + cvC$ bestimmen. — Es war nämlich in Fig. 10.: $H \equiv aA + bB$, $G \equiv bB + cC$ und aus der Geraden CZ, welche AB in $Z \equiv aA + bvB$ traf, wurde durch blosses Ziehen gerader Linien die Ge-

rade AX gefunden, welche der BC im Punkte $X \equiv bB + cvC$ begegnete. — Auf eben die Art lässt sich nun mittelst dieses Punktes, welcher in Fig. 11. C' heisst, und mit Hülfe der Punkte $bB + cC$ und $cC + dD$, in CD der Punkt $D' \equiv cC + dvD$ finden; und so kann man weiter zu den Punkten $E' \equiv dD + evE, F', \ldots$ fortgehen.

Hiernach ist nun:

$$aA + bvB + cv^2 C$$
$$= (a + bv) B' + cv^2 C = aA + v(b + cv) C',$$

folglich $\equiv$ dem Durchschnitt der Geraden $B'C$ und AC' welcher C'' heisse;

$$aA + bvB + cv^2 C + dv^3 D$$
$$= (a + bv + cv^2) C'' + dv^3 D = (a + bv) B' + v^2 (c + dv) D',$$

folglich $\equiv$ dem Durchschnitt der Geraden $C''D$ und $B'D'$, welcher D'' heisse. Eben so erhält man ferner

$$aA + bvB + cv^2 C + dv^3 D + ev^4 E$$

als den Durchschnitt E'' der Geraden $D''E$ und $C''E'$;

$$aA + bvB + \ldots + fv^5 F$$

als den Durchschnitt F'' der Geraden $E''F$ und $D''F'$; u. s. w.

Nachdem also die Punkte $A, B, C, \ldots, aA + bB, bB + cC, \ldots$ bestimmt, und somit die in den Ausdrücken vorkommenden Constanten construirt sind, kann man für alle Punkte B' der Geraden $aA + bvB$, und mithin für alle Werthe der Veränderlichen v die entsprechenden Punkte $C'', D'', \ldots$ in den Linien höherer Ordnungen $aA + \ldots + cv^2 C$, $aA + \ldots + dv^3 D$, etc., durch blosses Ziehen gerader Linien finden.

Sechstes Capitel.

Von der Berührung, den merkwürdigen Punkten und unendlichen Aesten krummer Linien in Ebenen.

§. 72. Alle in diesem Capitel enthaltenen Untersuchungen haben die Lösung folgender Aufgabe zum Zweck:

Für einen gegebenen Punkt einer gegebenen Curve eine andere einfachere Curve oder gerade Linie zu finden, welche der erstern bei dem gegebenen Punkte so nahe als möglich kommt, um somit aus der Beschaffenheit der einfachern Curve an jener Stelle und ihrer Lage gegen die gegebene Curve, die Beschaffenheit der gegebenen daselbst kennen zu lernen.

Je wichtiger diese Untersuchungen in der Theorie der Curven sind, um so weniger dürfte es überflüssig seyn, zu zeigen, wie auch hierbei der neue Calcul in Anwendung gebracht werden kann.

§. 73. Sey demnach

$$pA + qB + rC$$

der gegebene Ausdruck einer Linie in einer Ebene, also p, q, r gegebene Functionen einer Veränderlichen v. Für denjenigen Punkt der Linie, bei welchem ihr Gang untersucht werden soll, habe v den bestimmten Werth v'. Demzufolge substituire man für v, $v' + x$, so dass x die Veränderliche abgiebt, und es wird:

$$p = p' + \frac{dp'}{dv'} x + \frac{d^2p'}{2dv'^2} x^2 + \ldots$$

$$q = q' + \frac{dq'}{dv'} x + \frac{d^2q'}{2dv'^2} x^2 + \ldots$$

$$r = r' + \frac{dr'}{dv'} x + \frac{d^2r'}{2dv'^2} x^2 + \ldots$$

wo p', q', r' dieselben Functionen von v' bezeichnen, welche p, q, r von v sind.

Nachdem man nun für p, q, r diese Reihen in dem Ausdrucke substituirt hat, ordne man ihn nach den Potenzen von x, und setze sodann:

$$p'A + q'B + r'C = \mathfrak{a}\mathfrak{A}$$

$$\frac{dp'}{dv'} A + \frac{dq'}{dv'} B + \frac{dr'}{dv'} C = \mathfrak{b}\mathfrak{B}$$

$$\frac{d^2p'}{2dv'^2} A + \frac{d^2q'}{2dv'^2} B + \frac{d^2r'}{2dv'^2} C = \mathfrak{c}\mathfrak{C}$$

u. s. w.

wo also $\mathfrak{a} = p' + q' + r'$, $\mathfrak{b} = \frac{d\mathfrak{a}}{dv'}$, $\mathfrak{c} = \frac{d^2\mathfrak{a}}{2dv'^2}$, u. s. w.

Hierdurch erhält der Ausdruck die Form einer Reihe:

$$(N) \quad \mathfrak{a}\mathfrak{A} + \mathfrak{b}x\mathfrak{B} + \mathfrak{c}x^2\mathfrak{C} + \mathfrak{d}x^3\mathfrak{D} + \ldots$$

welche aus $n + 1$ Gliedern bestehen wird, wenn die Linie zur nten Ordnung gehört.

Das erste Glied, $\mathfrak{a}\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}$, ist nichts anders, als der in Betrachtung genommene Punkt der Curve selbst, indem für diesen $v = v'$ und mithin $x = 0$ ist. Je kleiner man x nimmt, desto näher wird folglich der durch die Reihe ausgedrückte Punkt dem Punkte $\mathfrak{A}$ liegen. Desto geringer wird aber zugleich der Einfluss der mit höhern Potenzen von x behafteten Glieder auf die Bestimmung eines solchen Punktes seyn, so dass mit Weglassung dieser Glieder man Ausdrücke für andere einfachere Li-

nien erhält, welche bei $\mathfrak{A}$ der Curve (N) möglichst nahe kommen werden.

§. 74. Man bilde hiernach durch Zusammennahme der zwei, drei, vier, etc. ersten Glieder der Reihe die Ausdrücke:

$$\text{I.}\quad \mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{b}x\mathfrak{B},$$
$$\text{II.}\quad \mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{b}x\mathfrak{B}+\mathfrak{c}x^2\mathfrak{C},$$
$$\text{III.}\quad \mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{b}x\mathfrak{B}+\mathfrak{c}x^2\mathfrak{C}+\mathfrak{d}x^3\mathfrak{D},$$

u. s. w.

wo die vorgesetzten Zahlen zugleich die Ordnungen der dadurch ausgedrückten Linien bezeichnen.

Seyen nun für einen unendlich kleinen Werth von x, welcher i heisse, die demselben in den Linien I., II., III.,... entsprechenden Punkte: $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$,... (Fig. 12.), also:

$$\mathfrak{B}'=\mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{b}i\mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{C}'=\mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{b}i\mathfrak{B}+\mathfrak{c}i^2\mathfrak{C},$$
$$\mathfrak{D}'=\mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{b}i\mathfrak{B}+\mathfrak{c}i^2\mathfrak{C}+\mathfrak{d}i^3\mathfrak{D},$$

u. s. w.

Hieraus folgt:

$$\mathfrak{C}'=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}i)\mathfrak{B}'+\mathfrak{c}i^2\mathfrak{C},$$
$$\mathfrak{D}'=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}i+\mathfrak{c}i^2)\mathfrak{C}'+\mathfrak{d}i^3\mathfrak{D},$$

u. s. w.

oder kürzer, weil es immer nur auf das gegenseitige Verhältniss der Coëfficienten ankommt, und i unendlich klein ist:

$$\mathfrak{B}'=\mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{b}i\mathfrak{B},\quad \mathfrak{C}'=\mathfrak{a}\mathfrak{B}'+\mathfrak{c}i^2\mathfrak{C},\quad \mathfrak{D}'=\mathfrak{a}\mathfrak{C}'+\mathfrak{d}i^3\mathfrak{D},\ \text{etc.}$$

Eben so findet sich, wenn für $x=-i$ die in den Linien I., II., III.,... zugehörigen Punkte mit $\mathfrak{B}_{,}$, $\mathfrak{C}_{,}$, $\mathfrak{D}_{,}$, ... bezeichnet werden:

$$\mathfrak{B}_{,}=\mathfrak{a}\mathfrak{A}-\mathfrak{b}i\mathfrak{B},\quad \mathfrak{C}_{,}=\mathfrak{a}\mathfrak{B}_{,}+\mathfrak{c}i^2\mathfrak{C},\quad \mathfrak{D}_{,}=\mathfrak{a}\mathfrak{C}_{,}-\mathfrak{d}i^3\mathfrak{D},\ \text{etc.}$$

Wie sich durch Auflösung dieser Formeln in Proportionen ergiebt (§. 21.), liegen folglich

1) 𝔅′ und 𝔅, in der Geraden 𝔄𝔅 dem 𝔄 unendlich nahe, aber auf entgegengesetzten Seiten dieses Punktes;

2) ℭ′ und ℭ, in den Geraden 𝔅′ℭ und 𝔅,ℭ von 𝔅′ und 𝔅, um ein Unendlichkleines der zweiten Ordnung entfernt, und zwar zugleich nach ℭ hin oder von ℭ abwärts, also immer auf einerlei Seite der Linie 𝔅,𝔄𝔅′ oder I.;

3) 𝔇′ und 𝔇, in den Geraden ℭ′𝔇 und ℭ,𝔇, von ℭ′ und ℭ, um ein Un. kl. der dritten Ordnung entfernt, und zwar der eine Punkt nach 𝔇 hin, der andere von 𝔇 abwärts, also beide auf entgegengesetzten Seiten der Linie ℭ,𝔄ℭ′ oder II.; u. s. w.

§. 75. Lehnsatz. Wenn von drei Punkten A, M, N der Punkt M von A um ein Unendlichkleines der 1sten Ordnung und N von M um ein Un. kl. der 2ten oder 3ten, 4ten etc. Ordnung absteht, so ist auch N von A um ein Un.kl. der 1sten Ordnung entfernt; und wenn zugleich die Winkel AMN und ANM von endlicher Grösse sind, so lassen sich AM und AN als die Elemente zweier Curven betrachten, zwischen denen in A eine Berührung von der 1sten oder 2ten, 3ten etc. Ordnung statt findet.

Allgemeiner: bedeuten m und n zwei positive ganze Zahlen, und ist AM von der mten, MN von der $(m+n)$ten Ordnung, so ist auch AN von der mten Ordnung, und, unter derselben Voraussetzung, dass AMN, ANM endliche Winkel sind, ist die Berührung der beiden Curven, welche AM und AN zu Elementen haben, — der Analogie nach — von der $\frac{n}{m}$ten Ordnung.

§. 76. Mit Hülfe dieses Satzes, der, wenn auch noch nicht so ausgedrückt, doch Jedem, welcher die abgekürzte Sprache der höhern Analysis versteht, sogleich einleuchten wird, zeigt sich nun folgendes:

1) Die Abstände 𝔄𝔅′, 𝔄ℭ′, 𝔄𝔇′,... 𝔄𝔅,, 𝔄ℭ,, 𝔄𝔇,,... sind von der ersten Ordnung; 𝔅′ℭ′, 𝔅′𝔇′,... 𝔅,ℭ,, 𝔅,𝔇,,... von der zweiten; ℭ′𝔇′,... ℭ,𝔇,,... von der dritten; u. s. w.

2) Da zugleich die gegenseitigen Neigungen der Geraden 𝔄𝔅, 𝔄ℭ, 𝔄𝔇, ... als endlich zu betrachten sind, so berühren sich sämmtliche Linien I., II., III.,... (N) in 𝔄; und zwar ist die Berührung der Linie I. mit jeder der übrigen II., III.,... (N) von der ersten Ordnung; die Berührung der Linie II. mit III.,... (N) von der zweiten; die Berührung der Linie III. mit jeder der folgenden von der dritten Ordnung; u. s. w.

3) Bei jeder dieser Linien fallen die der Berührung unmittelbar vorangehenden und folgenden Theile auf entgegengesetzte Seiten jeder Geraden, welche durch 𝔄 geht und gegen 𝔄𝔅 eine endliche Neigung hat, oder, — wie wir uns kurz ausdrücken wollen, — auf entgegengesetzte Seiten des Punktes 𝔄.

4) Alle Linien II., III.,... (N) sind in der Nähe von 𝔄 auf einerlei Seite der Linie I. enthalten. Eben so hat III. alle folgenden Linien auf einerlei Seite von sich liegen; und sofort jede Linie von höherer ungerader Ordnung. Dagegen wird jede Linie von gerader Ordnung, wie II., von allen folgenden in 𝔄 durchgangen, wobei aber ebenfalls diejenigen Theile der folgenden Linien, welche mit einander auf einerlei Seite von 𝔄 liegen, auch auf einer und derselben Seite von II. befindlich sind.

§. 77. Von jetzt an soll uns bloss die Linie I. oder die geradlinige Tangente noch beschäftigen. Sie hat den Ausdruck: $\mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{b}x\mathfrak{B}$.

Substituirt man darin für $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{B}$ aus §. 73. ihre Werthe, so kommt:

$$\left(p'+\frac{dp'}{d\nu'}x\right)A+\left(q'+\frac{dq'}{d\nu'}x\right)B+\left(r'+\frac{dr'}{d\nu'}x\right)C,$$

als allgemeiner Ausdruck der geradlinigen Tangente an die Curve $pA+qB+rC$ in dem Punkte, für welchen $\nu=\nu'$ ist.

Wenn $\frac{dp'}{d\nu'}+\frac{dq'}{d\nu'}+\frac{dr'}{d\nu'}=0$, also $\mathfrak{b}=0$, so ist $\mathfrak{B}$ ein unendlich entfernter Punkt, und die Tangente ist eine Linie durch $\mathfrak{A}$, parallel mit der durch $\mathfrak{B}$ bestimmten Richtung, also construirbar, obwohl die einzelnen Punkte derselben nicht durch den Ausdruck $\mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{b}x\mathfrak{B}$, sondern mit Hülfe des auf A, B, C zurückgebrachten gefunden werden können. Dasselbe gilt auch von den Ausdrücken berührender Linien höherer Ordnungen. Ist z. B. in dem Ausdrucke $\mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{b}x\mathfrak{B}+\mathfrak{c}x^2\mathfrak{C}$ eine der Summen der Differentialquotienten, welche $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ vorstellen, $=0$, oder sind es beide Summen zugleich, und folglich die Punkte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ unendlich entfernt, so ist demungeachtet eine berührende Linie der 2ten Ordnung vorhanden. Allein um solche zu construiren, muss man den Ausdruck zuvor auf A, B, C beziehen. — In dem Falle, wo $\mathfrak{a}=0$ und mithin $\mathfrak{A}$ unendlich entfernt ist, geht die Tangente in eine Asymptote über, wovon später mit Mehrerem die Rede seyn wird. —

Anders verhält es sich, wenn von den drey Differentialquotienten, welche eine der Summen $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ bilden, jeder einzeln $=0$ ist; z. B. $\frac{dp'}{d\nu'}=0$, $\frac{dq'}{d\nu'}=0$, $\frac{dr'}{d\nu'}$

$=o$. Denn alsdann ist das zugehörige Glied, $\mathfrak{b}x\mathfrak{B}$, als gar nicht vorhanden zu betrachten. Nur das erste Glied $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ kann auf diese Weise nicht wegfallen, indem, wenn p', q', r' zugleich $=o$ seyn sollten, jeder der drei Coëfficienten p, q, r den Factor $v-v'$ enthalten müsste, was der in §. 66. gemachten Annahme entgegen ist.

§. 78. Die Berührung einer Curve mit einer Geraden ist im Allgemeinen von der ersten Ordnung, kann aber an besondern Stellen der erstern auch von einer andern Ordnung seyn. Dergleichen Stellen, oder sogenannte **merkwürdige Punkte**, kommen vor, wenn in dem Anfange der Reihe (N) ein oder etliche Glieder, $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ immer ausgenommen, auf die eben gedachte Art wegfallen, so dass das wirklich vorhandene dritte Glied eine höhere Potenz von x, als die zweite, enhält, mag in dem vorhandenen zweiten Gliede, entweder die erste Potenz wie gewöhnlich, oder ebenfalls eine höhere angetroffen werden.

Fehle z. B. das Glied $\mathfrak{c}x^2\mathfrak{C}$, sey also der Anfang der Reihe:

$$(N)\quad \mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{b}x\mathfrak{B}+\mathfrak{d}x^3\mathfrak{D}+\ldots$$

Mit Anwendung der in §. 74. gebrauchten Bezeichnung findet sich:

$$\mathfrak{B}'=\mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{b}i\mathfrak{B},\quad \mathfrak{D}'=\mathfrak{a}\mathfrak{B}'+\mathfrak{d}i^3\mathfrak{D},$$
$$\mathfrak{B}_,=\mathfrak{a}\mathfrak{A}-\mathfrak{b}i\mathfrak{B},\quad \mathfrak{D}_,=\mathfrak{a}\mathfrak{B}_,-\mathfrak{d}i^3\mathfrak{D}.$$

Die Punkte $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}_,$ liegen daher von den Punkten $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}_,$ der Linie $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ oder der geradlinigen Tangente nur um ein Unendlichkleines der dritten Ordnung entfernt und auf entgegengesetzten Seiten dieser Linie (Fig. 13.). Die durch die drei ersten Glieder von (N) ausgedrückte Curve $\mathfrak{D}_,\mathfrak{A}\mathfrak{D}'$ durchgeht also in $\mathfrak{A}$ die Tangente, hat folglich daselbst einen **Wendungspunkt**, und die

Berührung ist von der zweiten Ordnung (§. 75.). Dasselbe wird aber auch von der Curve (N) selbst gelten, als welche sich bei 𝔄 nur um ein Un. kl. einer noch höhern Ordnung von 𝔇,𝔄𝔇′ entfernt.

§. 79. Nehmen wir jetzt an, dass das Glied $\mathfrak{b}x\mathfrak{B}$ wegfalle, und mithin der Anfang der Reihe:

$$(N) \quad \mathfrak{a}\mathfrak{A} + \mathfrak{c}x^2\mathfrak{C} + \mathfrak{d}x^3\mathfrak{D} + \ldots$$

sey. Alsdann wird für ein unendlich kleines x:

$$\mathfrak{C}' \equiv \mathfrak{a}\mathfrak{A} + \mathfrak{c}i^2\mathfrak{C}, \quad \mathfrak{D}' \equiv \mathfrak{a}\mathfrak{C}' + \mathfrak{d}i^3\mathfrak{D}$$
$$\mathfrak{C}_, \equiv \mathfrak{a}\mathfrak{A} + \mathfrak{c}i^2\mathfrak{C}, \quad \mathfrak{D}_, \equiv \mathfrak{a}\mathfrak{C}_, - \mathfrak{d}i^3\mathfrak{D}$$

Die Punkte $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}_,$ fallen daher in einen zusammen, der in der Geraden 𝔄ℭ von 𝔄 um ein Un. kl. der zweiten Ordnung absteht, und von welchem die Punkte $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}_,$, der eine nach 𝔇 hin, der andere von 𝔇 abwärts, um ein Un. kl. der dritten Ordnung entfernt sind (Fig. 14.). Hier ist also 𝔄ℭ die Tangente der Curve 𝔇,𝔄𝔇′ und mithin auch der Curve (N) in 𝔄, die Berührung aber von der Ordnung $\frac{1}{2}$, und so beschaffen, dass die der Berührung unmittelbar vorangehenden und folgenden Theile auf einerlei Seite des Punktes 𝔄 und auf entgegengesetzten der Tangente 𝔄ℭ liegen. Die Curve hat folglich eine sogenannte **Spitze** oder **Rückkehrpunkt der ersten Art.**

§. 80. Fehle wiederum das Glied $\mathfrak{b}x\mathfrak{B}$ und zugleich noch das Glied $\mathfrak{d}x^3\mathfrak{D}$, beginne also die Reihe mit

$$(N) \quad \mathfrak{a}\mathfrak{A} + \mathfrak{c}x^2\mathfrak{C} + \mathfrak{e}x^4\mathfrak{E} + \ldots$$

Hier geben die drei ersten Glieder, $x^2 = y$ gesetzt, den Ausdruck für eine Linie der zweiten Ordnung, welche die Gerade 𝔄ℭ im Punkte 𝔄 berührt, aber von 𝔄 nur nach einer Seite zu fortgeht, weil y nicht negativ werden kann. Aus demselben Grunde würde auch die Curve (N) in 𝔄 unterbrochen seyn, wenn die folgenden

Glieder ihres Ausdrucks nur gerade Potenzen von x enthielten. Sie würde dann aber durch die Substitution von y für x^2 auf die Ordnung $\frac{1}{2}n$ sich reduciren lassen, was dem §. 66. entgegen ist. Sey demnach das auf $\mathfrak{e}x^4\mathfrak{E}$ zunächst folgende Glied mit ungerader Potenz, $\mathfrak{f}x^5\mathfrak{F}$, wirklich vorhanden, so wird, wenn man in dem bisherigen Sinne auch die Buchstaben $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ accentuirt:

$$\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}_{,} = \mathfrak{a}\mathfrak{A} + \mathfrak{c}i^2\mathfrak{C}, \quad \mathfrak{E}' = \mathfrak{E}_{,} = \mathfrak{a}\mathfrak{C}' + \mathfrak{e}i^4\mathfrak{E},$$

$$\mathfrak{F}' = \mathfrak{a}\mathfrak{E}' + \mathfrak{f}i^5\mathfrak{F}, \quad \mathfrak{F}_{,} = \mathfrak{a}\mathfrak{E}' - \mathfrak{f}i^5\mathfrak{F}.$$

Es sind demnach (Fig. 15.) $\mathfrak{A}\mathfrak{C}'$, in $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, von der zweiten und $\mathfrak{C}'\mathfrak{E}'$, in $\mathfrak{C}'\mathfrak{E}$, von der vierten Ordnung; $\mathfrak{E}'\mathfrak{F}'$ aber und $\mathfrak{E}'\mathfrak{F}_{,}$, von $\mathfrak{E}'$ nach entgegengesetzten Seiten in $\mathfrak{E}'\mathfrak{F}$ liegend, von der fünften Ordnung; woraus weiter folgt, dass $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}_{,}$ auf einerlei Seite von $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, und von $\mathfrak{C}'$ um ein Un. kl. der vierten Ordnung entfernt sind. Die dem $\mathfrak{A}$ zunächst vorangehenden und folgenden Theile der Curve $\mathfrak{F}_{,}\mathfrak{A}\mathfrak{F}'$ liegen mithin auf einerlei Seite sowohl des Punktes $\mathfrak{A}$, als der Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, welche letztere zugleich die Tangente ist und mit jedem der beiden Theile eine Berührung der ersten Ordnung bildet. Es hat daher die Curve $\mathfrak{F}_{,}\mathfrak{A}\mathfrak{F}'$, und folglich auch die Curve (N), in $\mathfrak{A}$ eine Spitze der zweiten Art.

Zwischen den beiden Zweigen $\mathfrak{A}\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{F}_{,}$, welche sich zu dieser Spitze vereinigen, geht die Linie der zweiten Ordnung $\mathfrak{A}\mathfrak{C}'$ hindurch, und die Berührung derselben mit jedem der beiden Zweige und folglich auch die gegenseitige Berührung der Zweige ist von der Ordnung $\frac{3}{2}$.

§. 81. Seyen jetzt allgemein die drei ersten Glieder der Reihe:

$$(N) \quad \mathfrak{a}\mathfrak{A} + \mathfrak{g}x^g\mathfrak{G} + \mathfrak{h}x^h\mathfrak{H} + \ldots$$

wo g, h zwei positive ganze Zahlen bedeuten, und $g < h$;

so erhellet auf dieselbe Weise, nach der wir bei den bisherigen speciellen Fällen zu Werke gingen, Folgendes:

1) Die Curve (N) wird in $\mathfrak{A}$ von der Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{G}$ berührt.

2) Die dem $\mathfrak{A}$ zunächst vorangehenden und folgenden Theile der Curve liegen auf einerlei Seite dieses Punktes, (wie Fig. 14. u. 15.) oder auf entgegengesetzten Seiten desselben, (wie Fig. 12. u. 13.) je nachdem g gerade oder ungerade ist. Sie liegen ferner auf einerlei Seite der Tangente $\mathfrak{A}\mathfrak{G}$, (wie Fig. 12. u. 15.) oder auf entgegengesetzten, (wie Fig. 13. und 14.) nachdem h gerade oder ungerade ist.

3) Die Berührung der Curve mit $\mathfrak{A}\mathfrak{G}$ ist von der Ordnung $\frac{h}{g} - 1$.

§. 82. Es sind aber diese Regeln über das Vorhandenseyn und die Beschaffenheit merkwürdiger Punkte nur unter der bis jetzt stillschweigend gemachten Voraussetzung richtig, dass von den drei ersten, wirklich vorhandenen Punkten der Reihe keiner mit dem andern identisch ist, und dass dieselben nicht in einer Geraden liegen. Denn ist z. B. $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{A}$ identisch, so reducirt sich der Anfang der Reihe auf: $(\mathfrak{a}+\mathfrak{g}x^g)\mathfrak{A}+\mathfrak{h}x^h\mathfrak{H}=\mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{h}x^h\mathfrak{H}$, indem man es gegenwärtig nur mit unendlich kleinen Werthen der Veränderlichen zu thun hat, für solche aber $\mathfrak{g}x^g$ gegen $\mathfrak{a}$ verschwindet. Oder ist $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{G}$ identisch, so wird aus demselben Grunde der Anfang: $\mathfrak{a}\mathfrak{A}+(\mathfrak{g}x^g+\mathfrak{h}x^h)\mathfrak{G}=\mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{g}x^g\mathfrak{G}$. Liegt aber $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{G}$ in einer Geraden, so sey $\mathfrak{h}\mathfrak{H}=\mathfrak{a}'\mathfrak{A}+\mathfrak{g}'\mathfrak{G}$, und der Anfang der Reihe wird: $(\mathfrak{a}+\mathfrak{a}'x^h)\mathfrak{A}+(\mathfrak{g}x^g+\mathfrak{g}'x^h)\mathfrak{G}$, der sich wie vorhin auf $\mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{g}x^g\mathfrak{G}$ reducirt. In jedem dieser Fälle fliessen also die drei ersten Glieder in zwei

zusammen, und man ist genöthigt, in der Reihe noch weiter fortzugehen, und von den nächstfolgenden Gliedern dasjenige als drittes zu nehmen, dessen Punkt weder mit einem der beiden ersten Punkte, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{G}$ oder $\mathfrak{H}$, zusammenfällt, noch mit denselben in einer Geraden liegt.

Zugleich ist hieraus ersichtlich, wie es merkwürdige Punkte auch geben kann, ohne dass ein oder etliche Glieder im Anfang der Reihe ausfallen. So findet der Wendungspunkt in §. 78. auch dann statt, wenn $\mathfrak{A}$,$\mathfrak{B}$,$\mathfrak{C}$ in einer Geraden liegen; die Spitze der ersten Art in §. 79. auch dann, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ identisch sind; die Spitze der zweiten Art in §. 80., wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ identisch, und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ in einer Geraden liegen *). Denn überhaupt wird man $\mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{g}x^{g}\mathfrak{G}+\mathfrak{h}x^{h}\mathfrak{H}$ als Anfang der Reihe zu nehmen haben, wenn unter den auf $\mathfrak{A}$ folgenden Punkten, $\mathfrak{G}$ der erste, mit $\mathfrak{A}$ nicht identische ist, und unter den auf $\mathfrak{G}$ folgenden, $\mathfrak{H}$ der erste ist, der weder mit $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{G}$ identisch ist, noch mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{G}$ in einer Geraden liegt.

*) Nimmt man aus §. 73. die Ausdrücke der Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, auf A, B, C bezogen, so lassen sich, mit Hülfe der §§. 43. und 24. *a.*, diese Bedingungen folgenderweise durch Gleichungen darstellen.

Die Curve $pA+qB+rC$ hat für $v=v'$ einen Wendungspunkt, wenn für diesen Werth von v

$$d^2p\,(q\,dr-r\,dq)+d^2q\,(r\,dp-p\,dr)+d^2r\,(p\,dq-q\,dp)=0;$$

eine Spitze der ersten Art, wenn

$$q\,dr=r\,dq \text{ und } r\,dp=p\,dr, \text{ (folglich auch } p\,dq=q\,dp.)$$

eine Spitze der zweiten Art, wenn

$$q\,dr=r\,dq,\ r\,dp=p\,dr \text{ und}$$

$$d^2p\,(q\,d^2r-r\,d^2q)+d^3q\,(r\,d^2p-p\,d^2r)+\ldots=0.$$

§. 83. Hiermit glaube ich, die Hauptumstände bei der Berührung krummer Linien und das Vorzüglichste von der Beschaffenheit ihrer merkwürdigen Punkte auseinandergesetzt zu haben. Es sey mir aber erlaubt, dieselben Gegenstände noch auf eine andere Weise zu behandeln, die, wenn sie auch etwas mehr Zurüstung erfordert, doch den Vorzug einer grössern Anschaulichkeit besitzt, und insbesondere über die Natur der merkwürdigen Punkte ein helleres Licht verbreitet. Auch wird diese andere Darstellungsart, über die bisher noch nicht erwähnten Punkte, in denen sich zwei oder mehrere Aeste der Curve schneiden, und welche man doppelte, dreifache, etc. Punkte nennt, Einiges zu sagen, Gelegenheit geben.

Ich gehe hierbei von folgender Erklärung der Berührung aus.

Wenn zwei Linien sich in zwei, drei, vier, etc. Punkten schneiden, und die eine, oder beide Linien zugleich, dergestalt geändert werden, dass die Schneidungspunkte einander immer näher rücken, so sagt man im Augenblicke des Zusammenfallens derselben, dass zwischen den Linien eine Berührung von der ersten, zweiten, dritten, etc. Ordnung statt finde.

§. 84. Werde nun statt des Ausdrucks (N) in §. 73. zunächst folgender in Betrachtung gezogen:

$$(N^*) \quad \mathfrak{a}\mathfrak{A} + \mathfrak{b}x\mathfrak{B} + \mathfrak{c}x(x-i)\mathfrak{C} + \mathfrak{d}x(x-i)(x-i')\mathfrak{D}$$
$$+ \mathfrak{e}x(x-i)(x-i')(x-i'')\mathfrak{E} + \ldots,$$

wo $i, i' i'', \ldots$ endliche, constante Grössen bedeuten, die man, um etwas Gewisses zu setzen, positiv und $i < i' < i'' < \ldots$ annehme.

Heissen ferner die Punkte der Curve, in denen die Veränderliche x diesen Grössen der Reihe nach gleich wird, resp. $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \mathfrak{A}''', \ldots$, (Fig. 16.), so dass folglich

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{a}\mathfrak{A} + \mathfrak{b}i\mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{A}'' = \mathfrak{a}\mathfrak{A} + \mathfrak{b}i'\mathfrak{B} + \mathfrak{c}i'(i'-i)\mathfrak{C}$$

$$\mathfrak{A}''' = \mathfrak{a}\mathfrak{A} + \mathfrak{b}i''\mathfrak{B} + \mathfrak{c}i''(i''-i)\mathfrak{C} + \mathfrak{d}i''(i''-i)(i''-i')\mathfrak{D}$$

u. s. w.

Man nehme jetzt, wie in §. 74., von dem Ausdrucke (N^*) nach und nach die zwei, drei, vier, etc. ersten Glieder zusammen und bilde die Ausdrücke:

I*. $\mathfrak{a}\mathfrak{A} + \mathfrak{b}x\mathfrak{B}$,

II*. $\mathfrak{a}\mathfrak{A} + \mathfrak{b}x\mathfrak{B} + \mathfrak{c}x(x-i)\mathfrak{C}$,

III*. $\mathfrak{a}\mathfrak{A} + \mathfrak{b}x\mathfrak{B} + \mathfrak{c}x(x-i)\mathfrak{C} + \mathfrak{d}x(x-i)(x-i')\mathfrak{D}$,

u. s. w.

die nach den beigesetzten Zahlen Linien der ersten, zweiten, dritten, etc. Ordnung angehören werden.

Nun reducirt sich der Ausdruck I*. für $x = 0$ und $= i$, auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$; der Ausdruck II*. für $x = 0$, i und i', auf $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}''$; der Ausdruck III*. für $x = 0$, i, i', i'' auf $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$; u. s. w. Es geht folglich die Linie I*. durch die Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$; die Linie II*. durch die Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}''$; die Linie III*. nächstdem noch durch den Punkt $\mathfrak{A}'''$. Ueberhaupt also geht die Linie der kten Ordnung durch die ersten $k+1$ Punkte der Reihe $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots$, und hat dieselben mit allen Linien von höherer Ordnung gemein.

Es können aber die Grössen $i, i', i'', \ldots$ immer so klein genommen werden, dass diese Punkte zunächst die einzigen sind, in denen die Linien zusammen kommen. Auch werden sich in denselben je zwei Linien wirklich schneiden, nicht bloss berühren. Wir wollen dieses durch Vergleichung der Linie II*. mit irgend einer der andern von höherer Ordnung erläutern.

Heisse der die Linie von höherer Ordnung beschreibende Punkt, P, und der die Linie II*. beschreibende, Q, so ist: $P \equiv$

$$[\mathfrak{a}+\mathfrak{b}x+\mathfrak{c}x(x-i)]Q + x(x-i)(x-i')[\mathfrak{d}\mathfrak{D} + \mathfrak{e}(x-i'')\mathfrak{E}+ \ldots]$$

ein Ausdruck, der für genugsam kleine Werthe von $i, i', i'', \ldots$, und für eben so kleine, oder nicht viel grössere Werthe von x, mit dem Ausdrucke

$$P \equiv Q + p\mathfrak{D}, \text{ wo } p = \mathfrak{d}x(x-i)(x-i') : \mathfrak{a},$$

beinahe gleichgeltend angenommen werden kann.

Diesem letztern Ausdrucke zufolge liegt nun P mit Q in einer um $\mathfrak{D}$ beweglichen Geraden, und, weil p immer sehr klein ist, dem Q weit näher als dem $\mathfrak{D}$, bald von Q nach $\mathfrak{D}$ zu, bald auf der andern Seite von Q, nachdem p positiv oder negativ ist; für $p = o$, fällt P mit Q zusammen. Es geht aber p durch Null in das Entgegengesetzte über, wenn x aus dem Negativen durch Null in das Positive, und fernerhin im Positiven durch i und i' fortgeht, d. i. in den Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, und sonst nicht. Mithin werden sich die von den Punkten P und Q beschriebenen Curven zunächst nur in diesen drei Punkten begegnen, und darin sich jedesmal schneiden.

Denken wir uns nun die Grössen $i, i', i'', \ldots$ bis zum Verschwinden abnehmend, so rücken die Durchschnittspunkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, ... in Einen zusammen, und die Ausdrücke I*., II*., ... (N*) gehen über in I., II., ... (N) (§. 74.). Nach der in §. 83. gegebenen Erklärung müssen sich daher die Linien I. II. ... (N) in $\mathfrak{A}$ berühren, und zwar so, dass die Berührung der kten dieser Linien mit jeder der folgenden von der kten Ordnung ist.

§. 85. Aus jener Erklärung kann man sehr leicht auch die übrigen bei den Berührungen vorkommenden

Umstände ableiten. — Da von zwei sich in mehrern Punkten schneidenden Linien die zwei Theile der einen Linie, welche über den ersten und letzten Durchschnitt hinaus sich erstrecken, bei einer geraden Anzahl der Durchschnitte auf einerlei, bei einer ungeraden auf verschiedenen Seiten der andern Linie liegen, so wird auch bei dem Berührungspunkte die eine Linie ganz auf der einen Seite der andern enthalten seyn; oder sie daselbst durchgehen, je nachdem die Ordnung der Berührung ungerade oder gerade ist.

Nehmen wir ferner von den Linien I*., II*., ... (N*) irgend drei in Betracht. Sie heissen K, L, M, seyen von der kten, lten, mten Ordnung, und k kleiner als l und als m, so wird die Linie K jede der Linien L und M in den ersten $k+1$ Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, ... $\mathfrak{A}^{(k)}$, und in nicht mehrern schneiden. Lägen nun L und M vor dem ersten dieser Durchschnitte $\mathfrak{A}$ auf verschiedenen Seiten von K, so würden sie auch nach demselben, nach jedem andern, und folglich auch nach dem $(k+1)$sten Durchschnitte $\mathfrak{A}^{(k)}$ auf entgegengesetzten Seiten von K befindlich seyn. Da sich aber L und M, als Linien von höhern Ordnungen als der kten, in mehr als den $k+1$ ersten Punkten schneiden, so würde zu diesem Ende eine dieser Linien noch einmal durch K gehen müssen, welches nicht seyn kann. L und M müssen daher vor dem ersten Durchschnitte mit K sich auf einerlei Seite von K befinden. Denn alsdann werden sie auch nach dem $(k+1)$sten Durchschnitte auf einerlei Seite von K (auf dieselbe wie vorher, oder auf die entgegengesetzte, je nachdem k ungerade oder gerade ist) zu liegen kommen, und sich nun selbst in noch mehrern Punkten schneiden können, ohne dass eine von ihnen der Linie K abermals begegnet.

Die Folge hiervon ist, dass auch von je dreien der sich in $\mathfrak{A}$ berührenden Linien, die Linie der niedrigsten Ordnung auf beiden Seiten von $\mathfrak{A}$ ausserhalb der beiden andern Linien liegt. Vergl. §. 76. 4).

§. 86. Wenden wir jetzt dieselbe Darstellungsweise auf die in §. 78. etc. betrachteten merkwürdigen Punkte an.

Für den in §. 78. gedachten Fall, wo $\mathfrak{c}\mathfrak{C}=0$, ist der Anfang der Reihe:

$$(N^*)\quad \mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{b}x\mathfrak{B}+\mathfrak{d}x(x-i)(x-i')\mathfrak{D}+\ldots$$

Bezeichnet man wiederum mit $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$,... die Punkte, welche (N^*) für $x=i, i', \ldots$ giebt, so wird $\mathfrak{A}'\equiv\mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{b}i\mathfrak{B}$, wie vorhin, und $\mathfrak{A}''\equiv\mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{b}i'\mathfrak{B}$. Hier hat also die Curve mit der Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ drei auf einander folgende Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ gemein, und es lässt sich wie oben (§. 84.) zeigen, dass diese Punkte für genugsam kleine Werthe von $i, i', \ldots$ zunächst die einzigen und wirkliche Durchschnitte beider Linien sind. Die Construction davon giebt Fig. 17., welche für $i=i'=\ldots=0$ in Fig. 13. übergeht.

Für den zweiten Fall (§. 79.), wo $\mathfrak{b}\mathfrak{B}=0$, ist der Anfang der Reihe:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{c}x(x-i)\mathfrak{C}+\mathfrak{d}x(x-i)(x-i')\mathfrak{D}+\ldots$$

und man bekommt für $x=0$, i und i' die Punkte: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'\equiv\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}''\equiv\mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{c}i'(i'-i)\mathfrak{C}$, so dass hier die Curve zu zweien Malen durch den Punkt $\mathfrak{A}$ geht, und dieser mithin ein doppelter Punkt der Curve ist. Um dabei ihren Gang näher kennen zu lernen, setze man, wie in §. 84.:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{c}x(x-i)\mathfrak{C}\equiv Q,$$

$$[\mathfrak{a}+\mathfrak{c}x(x-i)]\,Q+x(x-i)(x-i')[\mathfrak{d}\mathfrak{D}+\ldots]\equiv P.$$

Hiernach ist Q ein Punkt der Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, und hat darin, das Verhältniss $\mathfrak{c}:\mathfrak{a}$ positiv angenommen, folgende Bewegung. Von $x=-\infty$ bis o, geht er von $\mathfrak{C}$ bis $\mathfrak{A}$; rückt alsdann, von $x=0$ bis $\frac{1}{2}i$, auf die andere Seite von $\mathfrak{A}$ bis zu dem Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{A}-\frac{1}{4}i^2\mathfrak{c}\mathfrak{C}$; kehrt, hierauf, von $x=\frac{1}{2}i$ bis i, nach $\mathfrak{A}$ zurück, und geht, von $x=i$ bis ∞, wieder nach $\mathfrak{C}$. Nun liegt der die Curve beschreibende Punkt P, mit Q und $\mathfrak{D}$, (oder vielmehr einem andern, für sehr kleine Werthe der $x, i, i', \ldots$ von $\mathfrak{D}$ nur wenig entfernten Punkte) in gerader Linie, fällt für $x=0$, i und i' mit Q zusammen, und durchgeht an diesen drei Stellen und zunächst an keinen andern die Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, so dass folglich die Theile der Curve vor dem ersten und nach dem letzten Durchschnitte auf verschiedenen Seiten von $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, aber auf einerlei Seite von $\mathfrak{A}$ liegen. Die Construction dieses Ganges zeigt Fig. 18. Für $i=0$ zieht sich die Schleife bei $\mathfrak{A}$ in einen Punkt zusammen, und wenn auch noch $i'=0$ wird, so vereinigt sich dieser Punkt mit $\mathfrak{A}''$, und aus Fig. 18. wird Fig. 14.

Der dritte Fall endlich (§. 80.), wo $\mathfrak{b}\mathfrak{B}=0$ und $\mathfrak{d}\mathfrak{D}=0$, und die Reihe mit den Gliedern beginnt:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{c}x(x-i)\mathfrak{C}+\mathfrak{e}x(x-i)(x-i')(x-i'')\mathfrak{E}+\ldots,$$

unterscheidet sich von dem vorhergehenden Falle nur dadurch, dass die Curve von der Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{A}''$ noch in dem weiter nach $\mathfrak{C}$ hin liegenden Punkte $\mathfrak{A}'''\equiv\mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{c}i''(i''-i)\mathfrak{C}$ geschnitten wird, und folglich nach allen Durchschnitten sich wieder auf die Seite von $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ wendet, auf welcher sie vor denselben sich befand. Vergl. Fig. 19. und Fig. 15.

Zusatz. Die in §. 83. aufgestellte Regel, aus der Anzahl der anfänglichen Durchschnittspunkte die Ord-

nung der nachherigen Berührung zu bestimmen, leidet in den Fällen, wo $b\mathfrak{B} = o$ ist, keine unmittelbare Anwendung. Indessen kann man auch hier übereinstimmende Resultate mit den obigen (§. 79. und §. 80.) erhalten, wenn man die Anwendung jener Regel folgendergestalt modificirt. — Nennt man den Theil der Curve Fig. 18., welcher bei der Bewegung des Punktes Q in der Richtung $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$ erzeugt wurde, den ersten, und denjenigen, welcher entstand, indem Q nach der entgegengesetzten Richtung $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ fortging, den zweiten, so schneidet, wie die Figur zeigt, der erste Theil die Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ nur einmal, in $\mathfrak{A}$; der zweite aber zweimal, in $\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}''$. Da nun die Ordnungszahl der Berührung, gleich ist der um eins verminderten Anzahl der Durchschnitte, so wären hiernach die Berührungen des ersten und zweiten Theils mit $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ resp. von der oten und 1sten Ordnung. Offenbar aber ist diese Verschiedenheit der Berührungen nur scheinbar, und hat in den willkührlich zu nehmenden Grössen i und i' ihren Grund. Denn man darf nur $i' < \frac{1}{2}i$, oder i und i' negativ und i' absolut grösser als i setzen, um zu bewerkstelligen, dass der erste Theil die $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ zweimal, und der zweite Theil einmal schneidet. Mit dem Verschwinden von i und i' wird also diese scheinbare Verschiedenheit sich gegenseitig ausgleichen, und folglich auf die Berührung des ersten sowohl als des zweiten Theils mit $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ als Ordnungszahl das arithmetische Mittel aus den beiden vorigen, welches $\frac{1}{2}$ ist, kommen.

Eben so findet sich aus Fig. 19., dass die Curve Fig. 15. mit $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ eine Berührung von der ersten Ordnung bildet. Denn nach Fig. 19. ist die Berührung des ersten Theils von der oten, des zweiten von der 2ten Ordnung, von o und 2 aber das arithm. Mittel = 1.

§. 87. Ist endlich allgemein, wie in §. 81.:

$$(N) \quad \mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{g}x^g\mathfrak{G}+\mathfrak{h}x^h\mathfrak{H}+\ldots$$

der Anfang der Reihe, so setze man statt x^h ein Product von h Factoren $x(x-i)(x-i')\ldots$, und statt x^g das Product von irgend g dieser h Factoren. Man erhält hiermit den Ausdruck für eine Curve, welche hmal die Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{G}$ schneidet, und mithin vor dem ersten und nach dem letzten Durchschnitte sich auf einerlei oder verschiedenen Seiten von $\mathfrak{A}\mathfrak{G}$ befindet, nachdem h gerade oder ungerade ist. Zugleich aber sind g dieser h Durchschnittspunkte mit $\mathfrak{A}$ identisch, so dass die Curve $(g-1)$mal, zwischen je zwei auf einander folgenden Durchgängen durch $\mathfrak{A}$ einmal, längs $\mathfrak{A}\mathfrak{G}$ ihre Richtung ändert, und vor dem ersten und nach dem letzten Durchgange durch $\mathfrak{A}$ bei einem geraden g auf einerlei, bei einem ungeraden auf verschiedenen Seiten von $\mathfrak{A}$ anzutreffen ist.

Lässt man nun $i, i', \ldots$ bis zum Verschwinden abnehmen, so zieht sich die $(g-1)$fache Verschlingung bei $\mathfrak{A}$, in $\mathfrak{A}$ selbst zusammen, die übrigen $h-g$ in $\mathfrak{A}\mathfrak{G}$ liegenden Durchschnitte vereinigen sich gleichfalls mit diesem Punkte, und die nunmehrige Curve wird $\mathfrak{A}\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{A}$ berühren dergestalt, dass sie vor und nach der Berührung auf einerlei oder verschiedenen Seiten von $\mathfrak{A}\mathfrak{G}$ (von $\mathfrak{A}$) sich befindet, nachdem h (g) gerade oder ungerade ist.

§. 88. Wenn eine Curve durch einen und denselben Punkt zwei, drei oder mehrere Male geht, so nennt man einen solchen Punkt einen doppelten, dreifachen oder überhaupt vielfachen Punkt der Curve. Der Punkt $\mathfrak{A}$, durch welchen die eben betrachtete Curve vor Annullirung der $i, i', \ldots$ gmal hindurch ging, ist

daher ein gfacher Punkt dieser Curve. Zugleich ersieht man aus dem vorigen §., wie, mit dergleichen Punkten versehene, Curven durch barycentrische Ausdrücke sehr leicht darstellbar sind.

Setzt man der Kürze willen $a, b, c, \ldots$ statt $v-a$, $v-b$, $v-c$, ..., und bedeuten p, q, r beliebige andere Functionen von v, so ist der allgemeine Ausdruck für eine Curve, welche

1) in A einen Doppelpunkt hat:

$$pA + abqB + abrC;$$

2) welche A und B zu Doppelpunkten hat:

$$cdpA + abqB + abcdrC;$$

3) bei welcher A, B, C Doppelpunkte sind:

$$cdefpA + abefqB + abcdrC.$$

Es folgt hieraus, dass eine Linie mit einem Doppelpunkte wenigstens von der dritten Ordnung ist. Denn in 1) können q und r nicht zugleich Constanten seyn, weil sonst der Ausdruck einer Geraden angehören würde. Vermöge der Ausdrücke in 2) und 3), wo p, q, r zugleich Constanten seyn können, gehört eine Linie mit zwei oder drei Doppelpunkten wenigstens zur vierten Ordnung.

Auf gleiche Art erhellet, dass eine Linie mit einem dreifachen Punkte wenigstens von der vierten, und eine Linie mit zwei oder drei dreifachen Punkten wenigstens von der sechsten Ordnung ist; u. s. w.

Noch werde bemerkt, dass Ausdrücke für Curven bisweilen auch zu isolirten Punkten der letztern führen können. Ein Beispiel hierzu giebt der einfache Ausdruck von der dritten Ordnung:

$$A + (1+v^2)B + v(1+v^2)C.$$

Lässt man darin v von $-\infty$ durch 0 bis $+\infty$ anwachsen, so erhält man die Reihe von Punkten, welche

den Hauptzug der Curve bilden. Ausser dieser Reihe giebt es aber noch einen zur Curve gehörigen Punkt, den F.punkt A, indem sich auf diesen der Ausdruck für $1+v^2=0$, also für den imaginären Werth von v, $\sqrt{-1}$, reducirt. A ist folglich ein isolirter Punkt der Curve.

Von den unendlichen Aesten.

§. 89. Nachdem wir bisher von der Berührung krummer Linien an endlich gelegenen Stellen ihres Laufs gesprochen haben, ist es noch übrig, von der Berührung an unendlich entfernten Punkten derselben zu handeln. Dergleichen Punkte, und mithin in das Unendliche sich erstreckende Aeste sind aber bei einer durch ihren Ausdruck gegebenen Curve vorhanden, wenn die Summe der Coëfficienten für einen oder mehrere Werthe der Veränderlichen $=0$ wird, folglich einen oder mehrere reelle Factoren hat. Sind dagegen die Factoren der Summe der Coëfficienten sämmtlich imaginär, was jedoch nur bei einer Curve von einer geraden Ordnung möglich ist, so ist die Curve auf einen endlichen Raum beschränkt.

§. 90. Sey demnach $v-v'$ ein Factor von $p+q+r$, also $p'+q'+r'=\mathfrak{a}=0$, so wird $p'A+q'B+r'C\equiv\mathfrak{A}$ ein unendlich entfernter Punkt der Curve (N), und so auch der einfachern vorhergehenden Linien ... III., II., I., deren Ausdrücke für $x=0$ sich sämmtlich auf $\mathfrak{A}$ reduciren. Alle diese Linien werden folglich nach einer durch $\mathfrak{A}$ bestimmten Richtung in das Unendliche fortgehen, und daselbst als zusammenfallend anzusehen seyn.

Um aber die gegenseitige Lage dieser Linien im Unendlichen genauer zu bestimmen, so heissen wie bisher die einem unendlich kleinen positiven (negativen) Werthe von x, $=i$, in den Linien I., II., III., ... entsprechen-

den Punkte $\mathfrak{B}', \mathfrak{C}', \mathfrak{D}', \ldots (\mathfrak{B}_{,}, \mathfrak{C}_{,}, \mathfrak{D}_{,}, \ldots)$. Weil hier $\mathfrak{a} = 0$, so wird:

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{a}\mathfrak{A} + \mathfrak{b}i\mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{C}' = \mathfrak{b}i\mathfrak{B}' + \mathfrak{c}i^2\mathfrak{C} = \mathfrak{b}\mathfrak{B}' + \mathfrak{c}i\mathfrak{C},$$
$$\mathfrak{D}' = (\mathfrak{b}i + \mathfrak{c}i^2)\,\mathfrak{C}' + \mathfrak{d}i^3\mathfrak{D} = \mathfrak{b}\mathfrak{C}' + \mathfrak{d}i^2\mathfrak{D},$$

weil $\mathfrak{c}i$ gegen $\mathfrak{b}$ verschwindet; u. s. w.

Auf dieselbe Weise erhält man für ein negatives i:
$\mathfrak{B}_{,} = \mathfrak{a}\mathfrak{A} - \mathfrak{b}i\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}_{,} = \mathfrak{b}\mathfrak{B}_{,} - \mathfrak{c}i\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}_{,} = \mathfrak{b}\mathfrak{C}_{,} + \mathfrak{d}i^2\mathfrak{D}$, u. s. w.

Was nun zuerst die Lage der Punkte $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}_{,}$ betrifft, so sey $'\mathfrak{A}$ ein beliebiger in der Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, von $\mathfrak{B}$ endlich entfernt, gelegener Punkt. Alsdann lässt sich $\mathfrak{a}\mathfrak{A} = \mathfrak{B} - {}'\mathfrak{A}$ setzen, und es wird:

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{a}\mathfrak{A} + \mathfrak{b}i\mathfrak{B} = (1 + \mathfrak{b}i)\,\mathfrak{B} - {}'\mathfrak{A},$$
$$\mathfrak{B}_{,} = \mathfrak{a}\mathfrak{A} - \mathfrak{b}i\mathfrak{B} = (1 - \mathfrak{b}i)\,\mathfrak{B} - {}'\mathfrak{A}.$$

$\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}_{,}$ (Fig. 20.) sind folglich zwei Punkte der Linie $'\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, von denen der eine von $'\mathfrak{A}$ über $\mathfrak{B}$ hinaus, der andere von $\mathfrak{B}$ über $'\mathfrak{A}$ hinaus unendlich entfernt liegt; d. h. zwei Punkte, die in der Linie $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ oder I. nach entgegengesetzten Richtungen um ein Unendlichgrosses der ersten Ordnung entfernt sind, — wenn nämlich, wie in dem Vorigen, i als un.klein von der ersten Ordnung betrachtet wird.

Es liegen zweitens die Punkte $\mathfrak{C}', \mathfrak{C}_{,}$ in den Geraden $\mathfrak{B}'\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}_{,}\mathfrak{C}$, der eine nach $\mathfrak{C}$ zu, der andere von $\mathfrak{C}$ abwärts, also auf entgegengesetzten Seiten der Linie I., und von $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}_{,}$ in Entfernungen, die gegen die unendlich grossen $\mathfrak{B}'\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}_{,}\mathfrak{C}$ unendlich klein, und mithin an sich von endlicher Grösse sind.

Es liegen drittens $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}_{,}$ in den Geraden $\mathfrak{C}'\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}_{,}\mathfrak{D}$, beide nach $\mathfrak{D}$ zu oder von $\mathfrak{D}$ abwärts, und von $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}_{,}$ in Entfernungen, die gegen die unendlich grossen $\mathfrak{C}'\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}_{,}\mathfrak{D}$

unendlich klein von der zweiten Ordnung, und folglich an sich unendlich klein von der ersten Ordnung sind; u. s. w.

§. 91. Wenn von zwei, in endlicher Entfernung von einander gelegenen, Punkten M und N, und so auch von der diese Punkte verbindenden Geraden ein dritter Punkt A um ein Unendlichgrosses der ersten (mten) Ordnung absteht, und wenn ein vierter Punkt B, in AM liegend, von A um ein Endliches oder Un.kl. der 1sten, 2ten, etc. (nten) Ordnung entfernt ist, so ist derselbe Punkt B, folglich auch eine durch ihn mit AN gezogene Parallele, von AN um ein Unendl.kleines der 1sten, 2ten, 3ten etc. [$(m+n)$ten] Ordnung entfernt.

Mit Anwendung dieses Satzes und mit der Bemerkung, dass die unendlichen Aeste der Linien II., III.,... im Unendlichen selbst als Parallelen mit der Geraden 𝔄𝔅, gelegt durch ℭ′ und ℭ,, durch 𝔇′ und 𝔇,, u. s. w. angesehen werden können, ergiebt sich nun Folgendes:

1) Jede der Linien I., II., III., ... (Fig. 20.) hat wegen des, in der Coëfficientensumme ihres Ausdrucks enthaltenen, Factors $v - v'$ zwei nach entgegengesetzten Richtungen in das Unendliche sich erstreckende Aeste.

2) Je zwei dieser Linien dienen sich gegenseitig zu Asymptoten, indem ihre Aeste, je weiter sie verlängert werden, sich desto mehr und über jeden angebbaren Abstand hinaus einander nähern.

3) In solch einer unendlichen Entfernung, in welcher der gegenseitige Abstand der Linien I. und II. als unendlich klein von der ersten Ordnung betrachtet werden kann, ist der Abstand der Linien II. und III. von der zweiten Ordnung; der Abstand der Linien III. und IV. von der dritten; u. s. w. Wir können dieses so ausdrücken: die Asymptosis der Linie I. mit II., und

folglich auch mit III., IV.,... ist von der ersten Ordnung; die Asymptosis der Linie II. mit III., IV.,... von der zweiten; u. s. w.: so dass nämlich überhaupt die Ordnungszahl der Asymptosis gleich ist der Ordnungszahl der unendlich grossen Entfernung, in welcher man eine Linie mit der ihr sich asymptotisch nähernden vergleicht, dividirt in die Ordnungszahl des unendlich kleinen, in jener Entfernung statt findenden, gegenseitigen Abstandes der beiden Linien.

4) Hieraus folgt weiter, dass von den Aesten, welche sich nach einer und derselben Richtung erstrecken, jeder Ast alle folgenden, d. h. die Aeste aller Linien von höherer Ordnung, auf einer und derselben Seite von sich liegen hat.

5) Es liegen ferner die beiden Aeste der Linie II. auf entgegengesetzten Seiten der Linie I., d. h. der eine oberhalb der andere unterhalb dieser Linie; die beiden Aeste der Linie III. auf einerlei Seite der Aeste von II., d. h. beide oberhalb, oder beide unterhalb der Aeste von II.; die Aeste von IV. wiederum auf entgegengesetzten Seiten der Aeste von III.; und so fort abwechselnd.

6) Ueberhaupt also liegen bei einer Asymptosis von gerader Ordnung irgend zweier Linien die beiden Aeste der einen auf einerlei Seite, und wenn die Ordnung ungerade ist, auf entgegengesetzten Seiten der andern Linie.

§. 92. Dies sind die gegenseitigen Lagen, welche bei den sich asymptotisch nähernden Aesten zweier Linien für gewöhnlich statt finden. Eben so aber, wie bei den Berührungen im endlichen Raume, giebt es auch hier, theils den merkwürdigen Punkten analoge, theils noch andere Fälle, welche von den gewöhnlichen abweichen und daher eine besondere Untersuchung nöthig machen.

Um nur einige dieser Fälle zu erörtern, so sey erstlich nächst $\mathfrak{a}=0$ zugleich $\mathfrak{c}\mathfrak{C}=0$, wie in §. 78., und man erhält:

$$\mathfrak{B}'\equiv\mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{b}i\mathfrak{B},\quad \mathfrak{B}_{,}\equiv\mathfrak{a}\mathfrak{A}-\mathfrak{b}i\mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{D}'\equiv\mathfrak{b}\mathfrak{B}'+\mathfrak{d}i^2\mathfrak{D},\quad \mathfrak{D}_{,}\equiv\mathfrak{b}\mathfrak{B}_{,}+\mathfrak{d}i^2\mathfrak{D}.$$

Hier liegen also die Punkte $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}_{,}$ (Fig. 21.) eben so wie vorhin, von ihnen aber $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}_{,}$ zugleich nach $\mathfrak{D}$ hin oder von $\mathfrak{D}$ abwärts, also immer auf einerlei Seite der Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, und von $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}_{,}$ in Abständen, die gegen $\mathfrak{B}'\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}_{,}\mathfrak{D}$ unendlich klein von der zweiten Ordnung sind. Die Curve durch $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{D}_{,}$ hat demnach zwei unendliche Aeste, die zwar ebenfalls nach entgegengesetzten Richtungen laufen, aber auf ein und derselben Seite ihrer geradlinigen Asymptote $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ liegen und mit dieser eine Asymptosis der zweiten Ordnung bilden.

Sey zweitens $\mathfrak{a}=0$ und nächstdem $\mathfrak{b}\mathfrak{B}=0$, wie in §. 79. In diesem Falle kommt:

$$\mathfrak{C}'\equiv\mathfrak{C}_{,}\equiv\mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{c}i^2\mathfrak{C},$$
$$\mathfrak{D}'\equiv\mathfrak{c}\mathfrak{C}'+\mathfrak{d}i\mathfrak{D}.\quad \mathfrak{D}_{,}\equiv\mathfrak{c}\mathfrak{C}'-\mathfrak{d}i\mathfrak{D}.$$

Man ziehe daher durch $\mathfrak{C}$ (Fig. 22.) eine Gerade, parallel mit der durch $\mathfrak{A}$ bestimmten Richtung, so fallen darin die Punkte $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}_{,}$ in einen zusammen, der um ein Unendlichgrosses der zweiten Ordnung entfernt liegt. Von diesem Punkte stehen die Punkte $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}_{,}$, der eine nach $\mathfrak{D}$ zu, der andere von $\mathfrak{D}$ abwärts, in Entfernungen, die gegen $\mathfrak{C}'\mathfrak{D}$ unendlich klein von der ersten Ordnung, also an sich unendlich gross von der ersten Ordnung sind. Die Abstände der Punkte $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}_{,}$ von $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ sind folglich un. kl. von der ersten Ordnung. Die Curve hat hiernach die $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ zur geradlinigen Asymptote, erstreckt sich zu beiden Seiten derselben und nach einer und der-

selben Richtung in das Unendliche, und die Asymptosis ist von der Ordnung $\frac{1}{2}$.

Wenn drittens $\mathfrak{a}=0$, $\mathfrak{b}\mathfrak{B}=0$ und, wie in §. 80., noch $\mathfrak{b}\mathfrak{D}=0$ ist, so wird:

$$\mathfrak{C}' \equiv \mathfrak{C}_, \equiv \mathfrak{a}\mathfrak{A} + \mathfrak{c}i^2\mathfrak{C}_,$$
$$\mathfrak{E}' \equiv \mathfrak{E}_, \equiv \mathfrak{c}\mathfrak{C}' + \mathfrak{e}i^2\mathfrak{E}_,$$
$$\mathfrak{F}' \equiv \mathfrak{c}\mathfrak{E}' + \mathfrak{f}i^3\mathfrak{F}, \quad \mathfrak{F}_, \equiv \mathfrak{c}\mathfrak{E}' - \mathfrak{f}i^3\mathfrak{F}.$$

In der Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ (Fig. 23.) liegt demnach der Punkt $\mathfrak{C}'$ um ein Unendl.grosses der zweiten Ordnung entfernt; in der Geraden $\mathfrak{C}'\mathfrak{E}$ steht der Punkt $\mathfrak{E}'$ von $\mathfrak{C}'$ um ein gegen $\mathfrak{C}'\mathfrak{E}$ Unendl.kleines der zweiten Ordnung ab, und in der Geraden $\mathfrak{E}'\mathfrak{F}$ die Punkte $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}_,$ von $\mathfrak{E}'$ zu beiden Seiten um ein gegen $\mathfrak{E}'\mathfrak{F}$ Unendl.kleines der dritten Ordnung. Wie hieraus ersichtlich, hat also die Curve zwei unendliche Aeste, die nach einerlei Richtung sich erstrecken und auf einerlei Seite ihrer geradlinigen Asymptote $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ liegen. Die Asymptosis aber ist von der ersten Ordnung.

§. 93. In den beiden letztern Fällen, wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{B}$ zugleich $=0$ sind, kann die Summe der Coëfficienten, $p+q+r$, nicht den blossen Factor $\nu-\nu'$ haben, sondern muss das Quadrat desselben enthalten. Kommt aber der Factor $\nu-\nu'$ quadratisch vor, so ist im Allgemeinen nur $\mathfrak{a}=0$ und $\mathfrak{b}=0$, nicht auch $\mathfrak{b}\mathfrak{B}=0$, sondern $\mathfrak{B}$ ein unendlich entfernter Punkt, folglich die Asymptote $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ eine unendlich entfernte Gerade, und daher nicht construirbar. Um aber auch hier zu finden, wie sich die Curve in das Unendliche ausdehnt, setze man:

$$\mathfrak{b}\mathfrak{B} + \mathfrak{c}i\mathfrak{C} \equiv Q', \quad \mathfrak{b}\mathfrak{B} - \mathfrak{c}i\mathfrak{C} \equiv Q_,,$$

so wird, weil $\mathfrak{b}=0$:

$$\mathfrak{C}' \equiv \mathfrak{a}\mathfrak{A} + \mathfrak{c}i^2 Q', \quad \mathfrak{C}_, \equiv \mathfrak{a}\mathfrak{A} + \mathfrak{c}i^2 Q_,.$$

Hiernach sind Q' und $Q,$ (Fig. 24.) zwei Punkte, die unendlich entfernt nach entgegengesetzten Richtungen in 𝔅ℭ liegen (§. 90.). Denkt man sich ferner durch Q' und $Q,$ zwei Parallelen nach der durch 𝔄 bestimmten Richtung gezogen, so liegen in diesen die Punkte ℭ′ und ℭ,, von Q' und $Q,$ in unendlichen Entfernungen der zweiten Ordnung und nach einerlei Seite zu. Die Curve II., und so auch jede der folgenden, hat daher zwei unendliche Aeste, die nach einer und derselben, durch 𝔄 bestimmten, Richtung fortgehen und sich dabei immer weiter von einander entfernen, so dass, wenn ihre Länge ein Unendliches der zweiten Ordnung geworden ist, ihr gegenseitiger Abstand ein Unendliches der ersten Ordnung beträgt.

Nennen wir nun, wie gewöhnlich, unter allen den Linien, welche sich einer vorgegebenen Linie asymptotisch nähern, die einfachste vorzugsweise die Asymptote, so ist es im gegenwärtigen Falle die Linie der zweiten Ordnung: $\mathfrak{a}\mathfrak{A} + \mathfrak{b}x\mathfrak{B} + \mathfrak{c}x^2\mathfrak{C}$. Weil $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b} = 0$ sind, so ist in ihrem Ausdrucke die Summe der Coëfficienten $= \mathfrak{c}x^2$, und folglich sie selbst eine Parabel. Vergl. §. 62. und §. 63.

§. 94. Schon aus der Erläuterung dieser wenigen Fälle wird man hinreichend abnehmen können, wie man in allen andern zu verfahren hat. Ich begnüge mich daher, folgende allgemeine Resultate noch beizufügen.

1) Jeder reelle Werth der Veränderlichen, durch welchen die Summe der Coëfficienten null wird, giebt ein Paar unendliche Aeste zu erkennen. Eine Curve hat demnach so viel dieser Paare, als wie viel reelle und ungleiche Factoren in der Coëfficientensumme enthalten sind.

2) Die zwei Aeste eines Paares erstrecken sich entweder nach entgegengesetzten Richtungen, oder nach einer und derselben, je nachdem die Potenz des ihnen zugehörigen Factors ungerade oder gerade ist.

3) Um für eines dieser Paare den Ausdruck der Asymptote zu erhalten, substituire man, wenn $(v-v')^m$ der zugehörige Factor ist, $x+v'$ für v in dem Ausdrucke der Curve, und unterdrücke sodann alle Potenzen von x, welche die mte übertreffen. Die Coëfficientensumme im Ausdrucke der Asymptote ist hiernach $=x^m$ in eine Constante multiplicirt, und folglich die Asymptote im Allgemeinen eine Linie der mten Ordnung, d. h. ihre Ordnung ist dem Exponenten des zugehörigen Factors gleich. Auch kann sie nicht mehr als ein Paar unendlicher Aeste haben, weil ihre Coëfficientensumme nur den Factor x, und keinen andern enthält.

Siebentes Capitel.

Von Ausdrücken krummer Linien im Raume.

§. 95. Die allgemeine Form des Ausdrucks für eine Linie im Raume ist:

$$pA+qB+rC+sD,$$

wo die Coëfficienten p, q, r, s Functionen einer Veränderlichen v sind. Vergl. §. 33. und §. 57.

Die in §. 66. gemachten Annahmen, dass die Coëfficienten ganze rationale Functionen von v seyen, dass sie keinen ihnen allen gemeinschaftlichen Factor haben, und dass der höchste Grad, in welchem die Potenzen von v im Ausdrucke vorkommen, durch Einführung einer

andern Veränderlichen auf keinen niedrigern gebracht werden könne, wollen wir auch hier festsetzen, und eben so wie dort die Linien nach der höchsten Potenz von v in Ordnungen eintheilen.

Bei den Linien der ersten Ordnung sind also p, q, r, s bloss lineäre Functionen von v, und folglich die Linien selbst Gerade (§. 45.).

Der allgemeine Ausdruck für eine Linie der zweiten Ordnung ist:

$$(a + a'v + a''v^2)A + (b + b'v + b''v^2)B + (c + c'v + c''v^2)C + (d + d'v + d''v^2)D.$$

Zu diesen Coëfficienten kommen bei Linien der dritten Ordnung resp. die Glieder $a'''v^3$, $b'''v^3$, $c'''v^3$, $d'''v^3$ hinzu; u. s. f. bei Linien noch höherer Ordnungen.

Zusätze. *a.* Setzt man in dem Ausdrucke einer Linie der nten Ordnung den einen der vier Coëfficienten, z. B. s, $= 0$, und substituirt die daraus für v hervorgehenden Werthe, deren Anzahl höchstens $= n$ seyn kann, der Reihe nach in den drei übrigen Coëfficienten p, q, r, so erhält man die Durchschnitte der Linie mit der F.ebene ABC. Eine Linie der nten Ordnung kann demnach von einer der F.ebenen, und so auch von jeder andern Ebene, in höchstens n Punkten geschnitten werden. Denn durch Veränderung der F.punkte kann man jede beliebige Ebene zu einer F.ebene machen, und man begreift eben so leicht, wie in §. 67., dass auch hier bei Annahme anderer F.punkte die Ordnung der Linie ungeändert bleibt.

b. So wie überhaupt eine Gerade, welche durch den Punkt $pA + qB + rC + sD$ und einen der F.punkte, z. B. A, gelegt wird, die entgegenstehende F.ebene BCD im Punkte $qB + rC + sD$ trifft, so wird hier, wo p, q, r, s

Functionen einer Veränderlichen sind, die Kegelfläche, deren leitende Linie $pA+qB+rC+sD$, und deren Spitze A ist, die Ebene BCD in der Curve $qB+rC+sD$ schneiden. Und umgekehrt, beschreibt man in den vier F.ebenen die Curven $qB+rC+sD$, $rC+sD+pA$, etc., so kann man sich die Curve $pA+qB+rC+sD$ als den Durchschnitt je zweier der vier Kegelflächen vorstellen, deren leitende Linien jene Curven in den F.ebenen, und deren Spitzen die entgegenstehenden F.punkte sind.

§. 96. Ganz auf die Weise, wie in §. 61. und §. 71., lässt sich der Ausdruck einer Linie im Raume durch Zusammennahme derjenigen Glieder, in welchen v in derselben Potenz vorkömmt, in eine Reihe umgestalten, deren Gliederzahl der um die Einheit vermehrten Ordnungszahl der Linie gleich ist. Setzt man nämlich:

$$aA+bB+cC+dD=a_{,}A_{,},$$
$$a'A+b'B+c'C+d'D=b_{,}B_{,},$$
$$a''A+b''B+c''C+d''D=c_{,}C_{,},$$

u. s. w.

so wird der Ausdruck für die Linien

der ersten Ordnung : $a_{,}A_{,}+b_{,}vB_{,}$

— zweiten — : $a_{,}A_{,}+b_{,}vB_{,}+c_{,}v^2C_{,}$

— dritten — : $a_{,}A_{,}+b_{,}vB_{,}+c_{,}v^2C_{,}+d_{,}v^3D_{,}$

— vierten — : $a_{,}A_{,}+\ldots+d_{,}v^3D_{,}+e_{,}v^4E_{,}$

u. s. w.

Wir sehen hieraus, dass die Linien nicht nur der ersten, sondern auch der zweiten Ordnung im Raume, mit den Linien derselben Ordnungen in einer Ebene einerlei sind, indem auch hier eine Linie der zweiten Ordnung ganz in einer Ebene, in der durch $A_{,}$, $B_{,}$, $C_{,}$ gehenden, enthalten ist. Erst die Linien der dritten und

höherer Ordnungen liegen im Allgemeinen nicht mehr in einer Ebene.

Der letztgefundene Ausdruck für die Linien der dritten Ordnung

$$a_{,}A_{,} + b_{,}vB_{,} + c_{,}v^2 C_{,} + d_{,}v^3 D_{,}$$

zeichnet sich vor den folgenden höherer Ordnungen dadurch aus, dass man die vier in ihm vorkommenden Punkte zugleich als die vier F.punkte des Raums nehmen kann. Er ist daher zugleich der allgemeine und einfachste Ausdruck für die Linien der dritten Ordnung auf die vier F.punkte bezogen. Nach §. 95. *b.* kann man sich diese Curve als den Durchschnitt zweier Kegelflächen denken, deren leitende Linien die Linien der zweiten Ordnung $a_{,}A_{,} + b_{,}vB_{,} + c_{,}v^2 C_{,}$ und $b_{,}B_{,} + c_{,}vC_{,} + d_{,}v^2 D_{,}$, und deren Spitzen resp. $D_{,}$ und $A_{,}$ sind.

Uebrigens können alle diese Ausdrücke in Reihenform vollkommen so, wie in §. 71. gezeigt wurde, auch dazu benutzt werden, um die ihnen zugehörigen Curven, und mithin sämmtliche Curven, mit denen wir es hier zu thun haben, durch blosses Ziehen gerader Linien zu construiren. Denn offenbar ist die dortige Annahme, dass die Punkte $A, B, C, D \ldots$ in einer Ebene liegen, nicht wesentlich nothwendig.

§. 97. Eben so kann die Lehre von den Berührungen, merkwürdigen Punkten und unendlichen Aesten krummer Linien im Raume ganz auf dieselbe Art behandelt werden, wie dies im vorigen Capitel bei krummen Linien in einer Ebene geschah. Ist nämlich, wie dort, für den Punkt, bei welchem der Gang der Curve untersucht werden soll, $v = v'$, und setzt man dem gemäss das veränderliche $v = v' + x$, wodurch

$$p = p' + \frac{dp'}{dv'} x + \frac{d^2p'}{2dv'^2} x^2 + \ldots$$

$$q = q' + \frac{dq'}{dv'} x + \frac{d^2q'}{2dv'^2} x^2 + \ldots$$

$$r = r' + \frac{dr'}{dv'} x + \frac{d^2r'}{2dv'^2} x^2 + \ldots$$

$$s = s' + \frac{ds'}{dv'} x + \frac{d^2s'}{2dv'^2} x^2 + \ldots$$

wird; setzt man ferner

$$p'A + q'B + r'C + s'D = \mathfrak{a}\mathfrak{A},$$

$$\frac{dp'}{dv'} A + \frac{dq'}{dv'} B + \frac{dr'}{dv'} C + \frac{ds'}{dv'} D = \mathfrak{b}\mathfrak{B},$$

$$\frac{d^2p'}{2dv'^2} A + \frac{d^2q'}{2dv'^2} B + \frac{d^2r'}{2dv'^2} C + \frac{d^2s'}{2dv'^2} C = \mathfrak{c}\mathfrak{C},$$

u. s. w.

so verwandelt sich der Ausdruck der Curve

$$pA + qB + rC + sD$$

in die nämliche Reihe, wie in §. 73.:

$$(N) \quad \mathfrak{a}\mathfrak{A} + \mathfrak{b}x\mathfrak{B} + \mathfrak{c}x^2\mathfrak{C} + \mathfrak{d}x^3\mathfrak{D} + \ldots$$

Insbesondere geht daraus hervor, dass alles, was dort von den berührenden Linien der ersten und zweiten Ordnung, so wie von den merkwürdigen Punkten gesagt wurde, als wobei nur die zwei oder drei ersten Glieder der Reihe zu berücksichtigen waren, hier wörtliche Anwendung findet. Denn die diesen zwei oder drei Gliedern zugehörigen Punkte sind, wie immer, in einer Geraden oder in einer Ebene enthalten.

§. 98. Der Ausdruck für die geradlinige Tangente an eine Curve im Raume ist daher $\mathfrak{a}\mathfrak{A} + \mathfrak{b}x\mathfrak{B}$, und wenn man darin für $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{B}$ ihre Werthe substituirt:

$$(p' + \frac{dp'}{dv'} x) A + (q' + \frac{dq'}{dv'} x) B + (r' + \frac{dr'}{dv'} x) C + (s' + \frac{ds'}{dv'} x) D.$$

Eben so ist $\mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{b}x\mathfrak{B}+\mathfrak{c}x^2\mathfrak{C}$ der Ausdruck für die Linie der zweiten Ordnung, welche mit der Curve eine Berührung der zweiten Ordnung bildet, d. h. drei auf einander folgende Punkte mit der Curve gemein hat (§. 83.). Dasselbe wird folglich auch von der Ebene $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ gelten, in welcher diese Linie enthalten ist. Unter allen durch $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ gelegten und mithin die Curve berührenden Ebenen ist daher die Ebene $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ diejenige, welche sich der Curve am meisten anschliesst. Denn sie geht durch drei auf einander folgende Punkte der Curve, während jede andere Ebene durch $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ nur zwei auf einander folgende Punkte, und jede der übrigen durch $\mathfrak{A}$ gelegten Ebenen nur den einen Punkt $\mathfrak{A}$ mit der Curve gemein hat.

Man nennt diese Ebene $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ die Krümmungsebene. Da sie erhalten wird, indem drei Durchschnittspunkte der Curve mit einer Ebene sich bis zum Zusammenfallen einander nähern, so erhellet eben so, wie in §. 85., dass die Curve sich von der einen Seite dieser Ebene auf die andere wendet, während sie bei bloss berührenden Ebenen auf einerlei Seite bleibt.

Der Ausdruck für die Krümmungsebene ist $\mathfrak{A}+x\mathfrak{B}+y\mathfrak{C}$, oder wenn man für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die ihnen proportionalen Ausdrücke setzt:

$$(p'+\frac{dp'}{dv'}x+\frac{d^2p'}{dv'^2}y)A+(q'+\frac{dq'}{dv'}x+\frac{d^2q'}{dv'^2}y)B$$
$$+(r'+\frac{dr'}{dv'}x+\frac{d^2r'}{dv'^2}y)C+(s'+\frac{ds'}{dv'}x+\frac{d^2s'}{dv'^2}y)D.$$

Beispiel. Machen wir hiervon eine Anwendung auf den oben gefundenen Ausdruck für die Linien der dritten Ordnung:

$$aA+bvB+cv^2C+dv^3D.$$

Die Tangente derselben in dem Punkte, wo $v = v'$ ist, hat den Ausdruck:

$$aA + b(v' + x)B + c(v'^2 + 2v'x)C + d(v'^3 + 3v'^2x)D.$$

Für den Punkt, wo diese Tangente die F.ebene ABC schneidet, ist der Coëfficient von D, $= 0$, also $x = -\frac{1}{3}v'$, folglich der Punkt selbst:

$$(K')\quad 3aA + 2bv'B + cv'^2C.$$

Sein Ort ist demnach eine Linie der zweiten Ordnung. — Für den Durchschnitt der Tangente mit der F.ebene BCD ist $x = \infty$ zu setzen, und daher dieser Punkt

$$(L')\quad bB + 2cv'C + 3dv'^2D,$$

also gleichfalls in einer Linie der zweiten Ordnung begriffen.

Dies giebt uns, wenn wir die Linien $aA + bvB + cv^2C$ und $bB + cvC + dv^2D$ kürzlich mit K und L bezeichnen, folgenden Satz:

Seyen K und L (Fig. 25.) *zwei Linien der zweiten Ordnung, welche in zwei verschiedenen Ebenen liegen, aber eine gemeinschaftliche Tangente haben, welche die Linie K im Punkte C, und L in B berühre. Man ziehe von B noch eine zweite Tangente, BA, an K, und von C noch eine zweite, CD, an L, wo A und D die resp. Berührungspunkte sind. Lässt man nun zwei Kegelflächen entstehen, welche D und A zu Spitzen, K und L aber zu leitenden Linien haben, so wird eine an die Durchschnittscurve dieser Kegelflächen berührend gelegte und daran fortbewegte Gerade in den Ebenen ABC und BCD wiederum zwei Linien der zweiten Ordnung K' und L' beschreiben, welche, eben so*

wie K und L, die AB, BC in A, C und die BC, CD in B, D berühren.

Auch findet dabei noch die Merkwürdigkeit statt, dass die Linie K' blos von K abhängig ist, also dieselbe bleibt, wie auch die Gestalt und Ebene der, die BC in B berührenden, Linie der zweiten Ordnung L geändert werden mag, und dass eben so L' allein durch L, nicht auch durch K, bestimmt wird.

Der Ausdruck für die Krümmungsebene an die Curve $aA + .. + dv^3D$ findet sich

$$aA + b(v' + x)B + c(v'^2 + 2v'x + 2y)C + d(v'^3 + 3v'^2x + 6v'y)D.$$

Setzt man hierin den Coëfficient von D, $= 0$, und eliminirt damit y aus dem Coëfficienten von C, so kommt der Ausdruck für die Durchschnittslinie der Kr.ebene mit ABC:

$$aA + b(v' + x)B + c(\tfrac{2}{3}v'^2 + v'x)C,$$

oder, wenn man $x = \frac{2}{3}z - \frac{1}{3}v'$ setzt:

$$3aA + 2b(v' + z)B + c(v'^2 + 2v'z)C.$$

Um den Durchschnitt der Kr.ebene mit BCD zu finden, hat man im Ausdrucke derselben x und $y = \infty$ zu setzen. Hierdurch verschwinden alle von x und y freien Glieder, und es kommt, wenn man $\frac{y}{x}$ zur Veränderlichen nimmt und $= z$ setzt:

$$bB + 2c(v' + z)C + 3d(v'^2 + 2v'z)D.$$

Man bemerkt leicht, dass diese Ausdrücke für die Durchschnittslinien zugleich die Ausdrücke für die an die Linien K' und L' gezogenen Tangenten sind. Der geometrische Grund hiervon liegt darin, dass die Krümmungsebene durch drei auf einander folgende Punkte und mithin durch zwei auf einander folgende Tangenten geht, dass also ihr Durchschnitt mit irgend einer andern Ebene immer die Linie berührt, welche die an der

Curve sich fortbewegende Tangente in dieser andern Ebene beschreibt.

§. 99. Curven im Raume sind im Allgemeinen von doppelter Krümmung. Die eine Krümmung besteht, wie bei Curven in einer Ebene, darin, dass die durch je zwei auf einander folgende Punkte der Curve gezogene Gerade, die Tangente, ihre Lage fortwährend ändert. Die andere offenbart sich dadurch, dass die durch je drei folgende Punkte der Curve gelegte Ebene, die Krümmungsebene, für jeden Punkt der Curve eine andere ist.

Eben so aber, wie bei Curven in einer Ebene es Stellen giebt, wo die Tangente für zwei oder mehrere auf einander folgende Punkte dieselbe bleibt, so können auch bei Curven im Raume nicht allein in Bezug auf die Tangente, sondern auch rücksichtlich der Krümmungsebene dergleichen Stellen vorkommen, Stellen also, wo vier oder noch mehrere Punkte hinter einander in einer und derselben Ebene liegen. Dies wird der Fall seyn, wenn in der Reihe (N) das Glied $\mathfrak{d}\mathfrak{D}$ oder noch mehrere der unmittelbar darauf folgenden Glieder wegfallen.

Um nur den einfachsten dieser Fälle zu betrachten, so sey für einen gewissen Werth von ν', $\mathfrak{d}\mathfrak{D}=0$, also $d^3p'=d^3q'=d^3r'=d^3s'=0$. Bedienen wir uns wiederum der in §. 84. und folg. angewendeten Methode, so ergiebt sich $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ wie dort, und

$$\mathfrak{A}'''\equiv\mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{b}i''\mathfrak{B}+\mathfrak{c}i''(i''-i)\mathfrak{C}.$$

Mithin ist noch dieser Punkt in der Ebene $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''$ enthalten. Ursprünglich wird also hier die Curve in vier Punkten hintereinander von der Ebene geschnitten, und der vorangehende und nachfolgende Theil der Curve liegen mithin auf einerlei Seite sowohl die-

ser als auch der nachherigen Krümm.ebene. In **Monge** *Application de l'Analyse à la Géometrie, partie II.*, pag. 363, heisst eine solche Stelle der Curve *point de simple inflexion.*

Wenn $\mathfrak{c}\mathfrak{C}=0$, also $d^2p'=d^2q'=d^2r'=d^2s'=0$ ist, so liegen, wie in §. 86., die drei Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ in einer Geraden ($\mathfrak{AB}$), folglich ebenfalls die vier Punkte $\mathfrak{A}$, . . $\mathfrak{A}'''$ in einer Ebene ($\mathfrak{ABD}$). Da hiermit beide Krümmungen der Curve zugleich wegfallen, so nennt Monge a. a. O. einen solchen Punkt *point de double inflexion.* Auch hier übrigens wird die Curve auf derselben Seite der Krümmungsebene bleiben.

§. 100. Rücksichtlich der unendlichen Aeste haben wir bei Curven im Raume zu dem, was von §. 89. bis 94. bei Curven in einer Ebene darüber gesagt wurde, und welches auch hier vollkommene Anwendung findet, noch Folgendes hinzuzufügen. Je weiter sich eine Curve in das Unendliche erstreckt, desto mehr wird sie zugleich ihrer Asymptote parallel, so dass in dem Unendlichen selbst Curve und Asymptote als zwei Parallelen angesehen werden können. Bei Linien von doppelter Krümmung kann man daher noch die Ebene dieser zwei Parallelen zu wissen verlangen. Offenbar ist diese Ebene keine andere, als die dortige Krümmungsebene der Curve, und man erhält folglich ihren Ausdruck, wenn man für den Werth von v, welcher den unendlich entfernten Punkt giebt, den Ausdruck der Krümmungsebene $\mathfrak{ABC}$ entwickelt.

Denken wir uns demnach die Ebene $\mathfrak{ABC}$ für den unendlich entfernten Punkt $\mathfrak{A}$, so liegen in derselben die in §. 90. mit $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}_,$ und $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}_,$ bezeichneten Punkte; ausserhalb aber die Punkte $\mathfrak{D}'=\mathfrak{b}\mathfrak{C}'+\mathfrak{d}i^2\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_,=\mathfrak{b}\mathfrak{C}_,+\mathfrak{d}i^2\mathfrak{D}$, und diesen Ausdrücken zufolge, beide auf einer-

lei Seite der Ebene; woraus wir nachstehenden Schluss ziehen:

Je mehr zwei zusammengehörige Aeste einer Linie von doppelter Krümmung sich ihrer Asymptote nähern, desto mehr nähern sie sich zugleich einer durch die Asymptote gehenden Ebene dergestalt, dass im gewöhnlichen Falle beide Aeste auf einerlei Seite dieser Ebene liegen, und von ihr um ein Unendlichkleines der zweiten Ordnung abstehen, wenn sie von der Asymptote selbst um ein Unendlichkleines der ersten Ordnung entfernt sind.

So wie endlich die geradlinige Asymptote für Aeste, welche durch einen quadratischen oder einen noch höhern Factor in der Coëfficientensumme angezeigt werden, im Allgemeinen unendlich entfernt liegt und daher nicht construirbar ist (§. 93.): eben so kann auch die asymptotische Krümmungsebene nicht construirt werden, wenn der den Aesten zugehörige Factor in der dritten oder einer noch höhern Potenz vorkömmt. Denn alsdann sind mit $\mathfrak{a}$ zugleich $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}=0$, folglich nächst $\mathfrak{A}$ zugleich $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ unendlich entfernte Punkte.

Achtes Capitel.

Von Ausdrücken für krumme Flächen.

§. 101. Der Ausdruck

$$pA + qB + rC + sD$$

gehört im Allgemeinen einer Fläche an, wenn seine Coëfficienten Functionen zweier Veränderlichen v und w sind. In der That, giebt man der einen Veränderlichen w irgend einen bestimmten Werth, so erhält man den Ausdruck für eine Linie. Alle die Linien aber, welche entstehen, indem man dem w nach und nach alle möglichen Werthe beilegt, bilden im Allgemeinen eine Fläche. — Ich sage: im Allgemeinen. Denn lassen sich die Coëfficienten als Functionen einer und derselben Function zweier Veränderlichen darstellen, so gehört der Ausdruck offenbar einer Linie und nur scheinbar einer Fläche an. So verwandelt sich z. B. der Ausdruck: $w^3 A + w^2 v B + w v^2 C + v^3 D$, wenn man $\frac{v}{w} = x$ setzt, in: $A + xB + x^2 C + x^3 D$.

Ein Beispiel für den Ausdruck einer Fläche haben wir an dem bereits in §. 49. gefundenen Ausdrucke für die Ebene, wo die Coëfficienten lineäre Functionen von v und w sind. Kommen höhere Potenzen der Veränderlichen vor, so wird der Ausdruck im Allgemeinen für eine krumme Fläche gelten.

§. 102. Die Flächen, in deren Ausdrücken die Coëfficienten ganze rationale Functionen von v und w sind, kann man, gleich den Linien (§. 66. und §. 95.), nach den höchsten in den Coëfficienten vorkommenden Dimensionen von v und w in Ordnungen eintheilen. Es wird dabei, wie dort, vorausgesetzt, dass die Coëfficienten keinen ihnen allen gemeinschaftlichen Factor haben, dass die höchste Dimension der Veränderlichen durch Einführung anderer Veränderlichen nicht auf einen niedrigern Grad gebracht werden kann, und dass überdies die Coëfficienten nicht Functionen von einer und derselben Function der beiden Veränderlichen sind. Doch will ich mich gegenwärtig bei dieser Eintheilung der Flächen in Ordnungen nicht aufhalten und nur bemerken, dass die Ordnung, welche einer Fläche ihrem Ausdrucke nach zukommt, im Allgemeinen niedriger ist, als diejenige, zu welcher sie ihrer Gleichung nach gehört. Wir werden dieses sogleich bei den Ausdrücken für die Flächen der zweiten Ordnung zu sehen Gelegenheit haben, wo $a+a'v+a''w+a'''v^2+a^{IV}vw+a^{V}w^2$ die allgemeine Form der Coëfficienten ist.

§. 103. Zusätze. *a.* Wenn man in dem Ausdrucke für eine Fläche den Coëfficienten des einen der vier F.punkte $=0$ setzt, und mittelst dieser Gleichung die eine der beiden Veränderlichen aus den drei übrigen Coëfficienten eliminirt, so erhält man den Ausdruck für die Linie, in welcher die Fläche von der durch die drei übrigen F.punkte gehenden F.ebene geschnitten wird. Sey z. B. der Ausdruck für die Fläche der zweiten Ordnung gegeben:

$$(A) \quad A+vB+vwC+(v^2-w)D,$$

und werde der Durchschnitt dieser Fläche mit der F.ebene ABC verlangt. — Man setze den Coëfficienten von

D, $v^2 - w = 0$, also $w = v^2$, und man erhält: $A + vB + w^3 C$, als den Ausdruck für die gesuchte Linie, welche hiernach von der dritten Ordnung auch im gewöhnlichen Sinne ist. (§. 70. zu Ende.) Da aber der Schnitt einer Ebene mit einer Fläche der zweiten Ordnung im gewöhnlichen Sinne immer eine Linie der zweiten Ordnung hervorbringt, so muss jene Fläche, die ihrem Ausdrucke nach von der zweiten Ordnung war, ihrer Gleichung nach zu einer höhern zu zählen seyn.

b. Um die Punkte zu finden, in denen eine der F.linien von einer Fläche geschnitten wird, setze man in dem Ausdrucke der letztern die Coëfficienten der beiden andern nicht in jener F.linie liegenden F.punkte, jeden für sich, $= 0$, und substituire die aus diesen zwei Gleichungen hervorgehenden Werthe der beiden Veränderlichen in dem Ausdrucke.

c. Setzt man die Coëfficienten dreier F.punkte, jeden für sich, $= 0$, und kann man für v und w Werthe finden, welche diesen drei Gleichungen zugleich Genüge leisten, oder, was dasselbe ist, gelangt man durch Elimination von v und w aus diesen Gleichungen zu einer identischen Gleichung, so geht die Fläche durch den vierten F.punkt.

d. Sind zwei der vier Coëfficienten, z. B. q und r, Functionen der beiden Veränderlichen, und die beiden andern constant, hat also der Ausdruck die Form: $aA + qB + rC + dD$, so kann man q und r für die beiden Veränderlichen selbst nehmen, und der Ausdruck gehört einer durch die F.linie BC und den Punkt $aA + dD$ gelegten Ebene an, was auch q und r für Functionen von v und w seyn mögen.

e. Wenn die Coëfficienten dreier F.punkte Functionen von der einen Veränderlichen allein sind, so kann

man den Coëfficienten des vierten F.punktes für die andere Veränderliche selbst nehmen, und der Ausdruck bezieht sich auf eine Kegelfläche, deren Spitze der vierte F.punkt ist, und deren leitende Linie das Aggregat der drei erstern F.punkte mit ihren Coëfficienten zum Ausdrucke hat.

f. Haben die Coëfficienten zweier F.punkte einen gemeinschaftlichen Factor, so ist daraus zu schliessen, dass die F.linie, welche die beiden andern F.punkte verbindet, in der Fläche selbst enthalten ist. Denn setzt man diesen gemeinschaftlichen Factor $=0$, und eliminirt damit die eine der beiden Veränderlichen, so erhält man den Ausdruck für die gedachte F.linie.

So haben z. B. in dem Ausdrucke (A), sowohl der Coëfficient von B, als der von C den Factor v. Annullirt man diesen, so kommt: $A - wD$. Dividirt man ferner den Ausdruck durch w, und setzt $\frac{1}{w} = t$, so wird er: $tA + tvB + vC + (v^2t - 1)D$, und reducirt sich, für $t = 0$, auf $vC - D$. — Die beiden F.linien AD und CD liegen demnach in der Fläche (A) selbst.

g. Haben die Coëfficienten dreier F.punkte einen gemeinschaftlichen Factor, so reducirt sich durch Nullsetzung dieses Factors der Ausdruck auf den vierten F.punkt, und die Fläche bildet daselbst eine Art von Kegelspitze.

Von der Berührung der Flächen.

§. 104. Nach demselben Verfahren, welches im Vorigen bei Ausdrücken für Linien angewendet wurde, lässt sich auch der Ausdruck für eine Fläche in eine Reihe entwickeln, deren erstes Glied irgend ein gegebener, in der Fläche selbst liegender Punkt ist, und deren folgende

Glieder nach den Potenzen der beiden Veränderlichen und den Producten aus diesen Potenzen geordnet sind. Alsdann wird sich auf ähnliche Weise, wie bei den Linien, darthun lassen, dass der Anfang dieser Reihe bis mit den Gliedern von der mten Ordnung den Ausdruck für eine zweite Fläche darstellt, welche im Allgemeinen von der mten Ordnung ist, und mit der ersten Fläche an jenem in ihr gelegenen Punkte eine Berührung der mten Ordnung bildet.

Ohne aber die Entwickelung dieser Reihe vorzunehmen, und noch weniger die gegenseitige Lage aller der sich berührenden Flächen in Untersuchung zu ziehen, als wo mit steigender Ordnung eine immer grössere Anzahl zu unterscheidender Fälle sich darbietet, will ich mich nur auf die Berührung der ersten Ordnung, d. i. auf die Berührung mit einer Ebene, beschränken, und zur Bestimmung dieser Ebene von dem Satze ausgehen: dass jeder dem Berührungspunkte unendlich nahe liegende Punkt der Fläche sich auch in der berührenden Ebene befindet, (oder vielmehr von dieser um ein Unendl.kleines einer höhern Ordnung entfernt ist).

§. 105. Sey demnach

$$pA + qB + rC + sD$$

der Ausdruck der Fläche, und für den Punkt derselben, an welchen die berührende Ebene gelegt werden soll, sey $v = v'$, $w = w'$, also der Punkt selbst:

$$\mathfrak{A} = p'A + q'B + r'C + s'D,$$

wenn p', q', r', s' dieselben Functionen von v' und w' vorstellen, welche p, q, r, s von v und w sind.

Bezeichnen ferner x und y zwei unendlich kleine, von einander unabhängige Grössen, so wird man den Ausdruck irgend eines dem $\mathfrak{A}$ unendlich nahen Punktes

$\mathfrak{A}'$ der Fläche erhalten, wenn man in dem vorigen für v', $v'+x$, und für w', $w'+y$ substituirt. Hierdurch verwandelt sich p' in $p'+\frac{dp'}{dv'}x+\frac{dp'}{dw'}y$, u. s. w., und der Ausdruck für $\mathfrak{A}'$ wird:

$$\left(p'+\frac{dp'}{dv'}x+\frac{dp'}{dw'}y\right)A+\left(q'+\frac{dq'}{dv'}x+\frac{dq'}{dw'}y\right)B$$
$$+\left(r'+\frac{dr'}{dv'}x+\frac{dr'}{dw'}y\right)C+\left(s'+\frac{ds'}{dv'}x+\frac{ds'}{dw'}y\right)D.$$

Nimmt man nun x und y nicht bloss unendlich klein, sondern überhaupt als zwei von einander unabhängige, veränderliche Grössen, so ist dieser Ausdruck der Ausdruck einer Ebene, in welcher $\mathfrak{A}$ und alle jene dem $\mathfrak{A}$ unendlich nahen Punkte $\mathfrak{A}'$ begriffen sind, folglich der Ausdruck der die Fläche in $\mathfrak{A}$ berührenden Ebene.

§. 106. Zusätze. *a.* Soll die Fläche von einer der F.ebenen, z. B. von ABC, berührt werden, so muss für gewisse Werthe von v und w, welche wiederum v' und w' heissen, in dem Ausdrucke der Berührungsebene der Coëfficient von D immer $=0$ seyn, was auch den Veränderlichen x und y für Werthe beigelegt werden; es müssen folglich s', $\frac{ds'}{dv'}$, $\frac{ds'}{dw'}$ zugleich $=0$ seyn.

Man setze daher s, als eine Function, die für $v=v'$ und $w=w'$ verschwinden soll, $=b(v-v')+c(w-w')$, wo b und c (eben so wie die nachherigen $d, e \ldots h$) beliebige Functionen von v und w vorstellen, die für $v=v'$ und $w=w'$ im Allgemeinen endliche Werthe erhalten. Hiernach wird

$$\frac{ds}{dv}=(v-v')\frac{db}{dv}+b+(w-w')\frac{dc}{dv},$$
$$\frac{ds}{dw}=(v-v')\frac{db}{dw}+c+(w-w')\frac{dc}{dw}.$$

Da nun $\frac{ds}{dv}$ und $\frac{ds}{dw}$ für $v = v'$ und $w = w'$ ebenfalls null werden sollen, so müssen b und c selbst, als worauf sich dann diese Differentialquotienten reduciren, von der Form $b(v - v') + c(w - w')$, und folglich s von der Form $f(v - v')^2 + g(v - v')(w - w') + h(w - w')^2$ seyn.

b. Soll der Berührungspunkt der Fläche mit der F.ebene ABC der F.punkt A selbst seyn, so müssen in dem Ausdrucke der Fläche, für $v = v'$ und $w = w'$, nächst dem Coëfficienten von D auch die Coëff. von B und C verschwinden, also letztere beide von der Form $b(v - v') + c(w - w')$ seyn.

Der allgemeine Ausdruck für eine Fläche, welche durch den F.punkt A geht und daselbst die F.ebene ABC zur berührenden hat, ist folglich:

$$aA + [b(v - v') + c(w - w')]B + [d(v - v') + e(w - w')]C + [f(v - v')^2 + g(v - v')(w - w') + h(w - w')^2]D,$$

wo noch der Gleichförmigkeit willen a für p geschrieben ist.

§. 107. Die Berührung einer Fläche mit einer Ebene ist im Allgemeinen von doppelter Beschaffenheit. Um diese zu untersuchen, wollen wir die F.pyramide, deren Lage stets willkührlich ist, so gestellt annehmen, dass, wie zu Ende des vorigen §., ABC eine Berührungsebene und A der Ber.punkt ist. Da nun gegenwärtig bloss der bei A unmittelbar gelegene Theil der Fläche in Betracht kömmt, für A aber $v = v'$ und $w = w'$ ist, so nehmen wir $v - v'$ und $w - w'$ als unendlichklein, und lassen demzufolge im letztgefundenen Ausdrucke der Fläche die Buchstaben $a, b, \ldots h$ die Constanten selbst bedeuten, in welche die vorhin damit bezeichneten Functionen für $v = v'$ und $w = w'$ übergehen. Werden jetzt, noch grös-

serer Kürze willen, die Coëfficienten von B und C, jeder durch a dividirt, zu den beiden Veränderlichen erwählt und resp. $=t$ und u gesetzt, wo daher t und u ebenfalls nur unendlichklein zu nehmen sind, so reducirt sich der Coëfficient von D auf die Form $it^2+ktu+lu^2$, und der Ausdruck wird

$$A+tB+uC+(it^2+ktu+lu^2)D.$$

Man setze nun:

$$A+tB+uC=Q,$$

und $\quad Q+(it^2+ktu+lu^2)D=P,$

so ist Q ein dem Ber.punkte A in der Ber.ebene ABC unendlich nahe liegender Punkt, und P ein Punkt der Fläche selbst, der von Q und mithin von der Ber.ebene um ein Unendlichkleines der zweiten Ordnung nach D zu, oder von D abwärts liegt, je nachdem $it^2+ktu+lu^2$ positiv oder negativ ist.

Hiernach sind im Allgemeinen zwei Fälle zu unterscheiden, nachdem nämlich das Trinomium $it^2+ktu+lu^2$ zwei imaginäre oder reelle Factoren hat.

Im ersten Falle, wo also $k^2<4il$, behält das Trinomium stets einerlei Zeichen, und die Fläche ist folglich in der Nähe des Berührungspunktes ganz auf einerlei Seite der Ber.ebene enthalten.

Im zweiten Falle, wo $k^2>4il$, wechselt das Zeichen des Trinomiums, und die Fläche liegt zum Theil auf der einen, zum Theil auf der andern Seite der Ber.ebene, wird also von dieser zugleich geschnitten. Es geschieht dieses in zwei durch A gehenden Linien, wovon man die Ausdrücke, oder vielmehr die Ausdrücke für die an diese Linien durch A gelegten Tangenten, erhält, wenn man die zwei Factoren des Trinomiums hintereinander $=0$ setzt. Durch diese zwei Linien wird die Ber.ebene

um A herum in vier Theile getheilt, über und unter welchen die Fläche abwechselnd befindlich ist.

Als Beispiel einer solchen Fläche dient eine Revolutionsfläche, bei welcher die erzeugende Linie ihre erhabene Seite der Axe zukehrt. Denn man denke sich die erzeugende Linie in irgend einer ihrer Lagen, und durch irgend einen ihrer Punkte den Kreis gezogen, welchen der Punkt bei der Umdrehung beschreibt. Beide Linien, die erzeugende und der Kreis, sind in der Fläche selbst begriffen, und folglich die Ebene durch die zwei Tangenten, welche in dem gedachten Punkte an die zwei Linien gezogen werden, die Ber.ebene in diesem Punkte. Nun liegt aber der Kreis von seiner Tangente nach der Axe zu, und die erzeugende Linie von der ihrigen auf der von der Axe abwärts gekehrten Seite. Folglich wird auch die Fläche zum Theil auf der einen und zum Theil auf der andern Seite der Ber.ebene liegen, also von letzterer geschnitten werden.

Ausser diesen zwei Hauptarten der Berührung giebt es noch eine specielle dritte: wenn nämlich die zwei Factoren des Trinomiums einander gleich sind, also $k^2 = 4il$ ist. In diesem Falle liegt zwar eben so, wie im ersten, die Fläche nur auf einer Seite der Ebene, weil der Coëfficient von D für alle Werthe von t und u einerlei Zeichen hat; allein die Berührung geschieht nicht bloss in A, sondern in einer durch A gehenden Linie, deren Tangente, wie im zweiten Falle, durch Nullsetzung des quadratischen Trinomiums erhalten wird. — Wenn diese Art der Berührung nicht bloss an einzelnen Stellen, sondern überall auf der Fläche statt findet, so sind die Berührungslinien Gerade, die Fläche selbst aber ist einerlei mit den sogenannten abwickelbaren, wovon der Kegel und der Cylinder besondere Arten sind.

§. 108. Um in das Wesen der Berührung krummer Flächen mit Ebenen eine noch vollkommnere Einsicht zu erlangen, wollen wir uns die berührende Ebene parallel mit sich fortbewegt vorstellen, und nun die Curve betrachten, in welcher sie unmittelbar vor oder nach der Berührung die Fläche schneidet. Der Ausdruck für diese

Curve muss sich offenbar aus dem obigen Ausdrucke der Fläche herleiten lassen. Indess wird die Untersuchung leichter von Statten gehen, wenn wir an der Stelle der F.punkte und der barycentrischen Ausdrücke ein System rechtwinklicher Coordinaten x, y, z anwenden, und die Fläche durch eine Gleichung zwischen x, y, z gegeben seyn lassen.

Sey daher die Ebene der x, y die berührende, und der Anfangspunkt der Coordinaten der Berührungspunkt, so muss z eine solche Function von x und y seyn, dass für $x = 0$ und $y = 0$ nicht allein z, sondern auch $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy} = 0$ werden. Durch ähnliche Schlüsse, wie in §. 106. angewendet wurden, findet sich hiernach

$$z = ax^2 + bxy + cy^2,$$

wo a, b, c Functionen von x und y sind, die für $x = 0$ und $y = 0$ endliche Werthe erhalten, und welche Werthe wir jetzt, wo es bloss auf den in unmittelbarer Nähe des Ber.punktes befindlichen Theil der Curve ankömmt, für diese Functionen selbst nehmen.

Hieraus fliesst nun zuerst, eben so wie im vor. §., dass die Berührung nur in einem Punkte geschieht und die Fläche auf einerlei Seite der Ber.ebene liegt, oder dass die Fläche von der Ebene zugleich geschnitten wird, oder dass sie von der Ebene in einer Linie berührt wird, nachdem $b^2 <$ oder $>$ oder $= 4ac$ ist.

Heisse ferner A der Anfangspunkt der Coordinaten oder der Berührungspunkt, und werde durch einen, dem A in der Axe der z unendlich nahen, Punkt A' eine mit der Ebene der x, y parallele Ebene gelegt. Die Gleichung für dieselbe ist, wenn wir $AA' = i$ setzen: $z = i$;

und folglich die Gleichung für die Durchschnittslinie der Ebene mit der Fläche:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = i.$$

Wir schliessen hieraus: *Die Linie, in welcher eine krumme Fläche von einer daran gelegten Berührungsebene geschnitten zu werden anfängt, wenn diese parallel mit sich fortbewegt wird, ist im Allgemeinen ein Kegelschnitt, welcher* (A' d. h.) *die Projection des Berührungspunktes auf die schneidende Ebene zum Mittelpunkte hat, und eine Ellipse oder Hyperbel ist,* (nachdem $b^2 <$ oder $> 4ac$, d. h.) *nachdem die Fläche mit der berührenden Ebene bloss den Berührungspunkt gemein hat, oder von dieser zugleich geschnitten wird.*

Nur muss im ersten Falle, wo das Trinomium $ax^2 + \ldots$ für alle Werthe von x und y einerlei Zeichen hat, die Bewegung der Ber.ebene nach der Seite zu geschehen, auf welcher i das nämliche Zeichen bekommt.

Im zweiten Falle wird die Ebene sowohl vor als nach der Berührung die Fläche schneiden. Nimmt man dabei an, dass die beidesmaligen Durchschnittspunkte der Ebene mit der Axe der z, von A gleichweit abstehen, so sind die Gleichungen der Durchschnitte mit der Fläche:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = i \quad \text{und} \quad ax^2 + bxy + cy^2 = -i,$$

also die Durchschnitte selbst zwei Hyperbeln, die, wenn man sie auf die Ebene der x, y projicirt, zwei conjugirte Hyperbeln werden. Die Gleichung für die gemeinschaftlichen Asymptoten dieser projicirten Hyperbeln ist: $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$; folglich sind die Asymptoten zugleich die Linien, in denen die Fläche von der Ber.ebene geschnitten wird.

§. 109. Die betrachteten Durchschnitte einer krummen Fläche mit einer der berührenden unendlich nahe

liegenden Ebene sind ganz vorzüglich geschickt zur Entwickelung der merkwürdigen Sätze, welche rücksichtlich der Krümmungshalbmesser und unendlich naher Normalen einer Fläche statt finden. Wiewohl nun eigentlich von diesen Gegenständen hier eben so wenig, als früher bei der Lehre von der Berührung krummer Linien, die Rede seyn kann, indem der dabei zum Grunde liegende Begriff des rechten Winkels, so wie der Begriff des Verhältnisses zweier Winkel überhaupt, von den Untersuchungen, denen die vorliegende Schrift gewidmet ist, völlig ausgeschlossen bleibt, so kann ich doch nicht umhin, angesehen die besondere Anschaulichkeit, welche die gedachten Gegenstände durch die folgende Darstellungsart gewinnen, die hier vorgesteckten Gränzen einmal zu überschreiten.

Sey (Fig. 26.) die Ebene des Papiers die berührende, und in derselben A der Berührungspunkt und $PRQS$ die Projection der Ellipse, in welcher die Fläche von einer mit der berührenden parallelen und ihr unendlich nahen Ebene im ersten Falle geschnitten wird. Diese Projection wird eine der erstern gleiche Ellipse und A ihr Mittelpunkt seyn. Der gegenseitige Abstand der beiden Ebenen heisse i, wie vorhin; er ist von der zweiten Ordnung, wenn die Durchmesser der Ellipse als unendlich klein von der ersten Ordnung betrachtet werden. Sey nun TAU die Projection irgend einer durch den Berührungspunkt A auf der Fläche gezogenen Curve. Der innerhalb der Ellipse liegende Theil dieser Projection, TU, wird wegen der unendlichen Kleinheit der Ellipse als geradlinig angesehen werden können; der Theil der Curve selbst aber, welcher dem Theil AT oder AU der Projection zugehört, wird, als Kreisbogen betrachtet, das noch unendlich kleinere i zu seinem Quersinus ha-

ben. Der Krümmungshalbmesser dieser Curve ist daher in A, $= \frac{AT^2}{2i}$, also dem Quadrate des Durchmessers proportional, in welchem die Ellipse von der Curve geschnitten wird.

Aus der Natur der Ellipse folgt nun sogleich, dass unter allen den Krümmungshalbmessern, welche die auf der Fläche durch irgend einen Punkt A derselben gezogenen Curven in diesem Punkte A haben, der grösste und kleinste zweien Curven angehören, die sich in A unter rechten Winkeln schneiden. Es sind nämlich diejenigen Curven, welche bei A mit der grossen und kleinen Axe der Ellipse, PQ und RS, zusammenfallen.

Man setze den Winkel $PAT = \varphi$, so sind, PQ und RS zu den Axen eines rechtwinklichen Coordinatensystems genommen, die Coordinaten von T: $AT \cos\varphi$, $AT \sin\varphi$; und aus der bekannten Gleichung zwischen diesen Coordinaten ergiebt sich:

$$\frac{1}{AT^2} = \frac{\cos\varphi^2}{AP^2} + \frac{\sin\varphi^2}{AR^2}.$$

Heissen nun die Krümmungshalbmesser der Curven PQ, RS, TU resp. r, r', ϱ, so verhalten sich $r : r' : \varrho = AP^2 : AR^2 : AT^2$, und die vorige Gleichung wird:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos\varphi^2}{r} + \frac{\sin\varphi^2}{r'},$$

die bekannte Relation zwischen dem grössten, r, dem kleinsten, r', und irgend einem andern Kr.halbmesser ϱ, dessen Curve die dem grössten zugehörige unter dem Winkel φ schneidet.

Werde endlich in einem beliebigen Punkte der kleinen Ellipse eine Normale auf der Fläche errichtet. Da

die Ellipse in der Fläche selbst liegt, so wird diese Normale auch die Peripherie der Ellipse unter rechten Winkeln treffen, und folglich die rechtwinkliche Projection der Normale auf die Berührungsebene zugleich eine Normale der auf diese Ebene projicirten Ellipse seyn, wie z. B. *TN*. Die Normale der Fläche in dem Berührungspunkte steht senkrecht auf der ber. Ebene, und ihre rechtwinkliche Projection ist daher der Punkt *A* selbst. Da nun unter allen Normalen einer Ellipse nur diejenigen auf den Mittelpunkt stossen, welche durch die Endpunkte der grossen und kleinen Axe geführt werden, so folgt, dass, wenn man durch einen Punkt *A* der Fläche eine Normale legt, unter allen andern unendlich nahen Normalen nur diejenigen die erstere schneiden, welche in den durch *A* gehenden Curven der grössten und kleinsten Krümmung auf der Fläche errichtet werden.

Ganz ähnliche Betrachtungen lassen sich bei dem zweiten Falle anstellen, wo die Fläche von der sie berührenden Ebene zugleich geschnitten wird. Seyen wiederum (Fig. 27.) die Ebene des Papiers die berührende, *A* der Berührungspunkt und *KL, MN* die Durchschnittslinien der Fläche mit der Ber.ebene. Letztere sind, wie bereits erinnert, die gemeinschaftlichen Asymptoten von den Projectionen der zwei Hyperbeln, in denen die sich parallel fortbewegende Berührungsebene unmittelbar vor und nach der Berührung die Fläche schneidet. Seyen *KPN..MQL, KRM..NSL* diese Projectionen, von denen die erstere der über, die letztere der unter der ber. Ebene liegenden Hyperbel, in dem Abstande $\pm i$, angehöre. Alsdann ist klar, dass von allen auf der Fläche durch *A* gezogenen Curven diejenigen, welche innerhalb der Winkel *MAL, KAN* liegen, bei *A* ihre hohle Seite und

Krümmungshalbmesser nach oben, und diejenigen, welche innerhalb der Winkel KAM, NAL enthalten sind, ihre hohle Seite und Kr.halbmesser nach unten zu kehren; dass folglich, die Kr.halbmesser der erstern Curven positiv gesetzt, die der letztern negativ, dagegen die Kr.halbmesser der Curven, welche mit den Asymptoten zusammenfallen, unendlich sind.

Schneidet eine durch A gelegte Curve die eine der beiden Hyperbeln in T, so ist ihr Krümmungshalbmesser, absolut genommen, $= \frac{AT^2}{2i}$, und mithin desto kleiner, je kleiner der Winkel ist, welchen die Curve mit der Hauptaxe PQ (oder RS), der von ihr geschnittenen Hyperbel macht. Die grösste Krümmung haben folglich unter den ihnen zunächst liegenden diejenigen zwei Curven, welche mit den Hauptaxen selbst zusammenfallen. Sie schneiden sich daher unter rechten Winkeln, und ihre Kr.halbmesser haben entgegengesetzte Zeichen.

Bezeichnet man die absoluten Werthe dieser Kr.halbmesser von PQ, RS durch r, r', und den irgend einer andern durch A gehenden Curve TU, welche mit PQ einen Winkel $= \varphi$ macht, durch ϱ, so lässt sich auf dieselbe Weise aus der Gleichung für die Hyperbel, wie vorhin aus der Gleichung für die Ellipse, darthun, dass

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos\varphi^2}{r} - \frac{\sin\varphi^2}{r'}.$$

Auch erhellet eben so wie vorhin, dass unter allen Normalen, welche durch, dem A unendlich nahe liegende, Punkte der Fläche geführt werden, nur diejenigen die in A errichtete Normale schneiden, deren Punkte in den Curven der grössten Krümmung liegen.

Was zuletzt den Fall betrifft, wo $ax^2 + bxy + cy^2$ ein Quadrat ist, und die Fläche von der Ebene in einer

Linie berührt wird, so ergiebt sich durch ein ganz analoges Verfahren, dass, wenn die ber. Ebene um ein Unendlichkleines der zweiten Ordnung nach der Seite, wo die Fläche liegt, parallel fortgeführt wird, sie die Fläche in zwei Parallellinien schneidet, welche um ein Unkleines der ersten Ordnung von einander abstehen, und zwischen welchen der Berührungspunkt mitten inne liegt. Hieraus ist weiter zu schliessen, dass unter allen Curven durch den Berührungspunkt, diejenige, welche mit jenen Parallelen parallel geht, gar keine Krümmung, diejenige aber, welche die Parallelen rechtwinklich schneidet, die grösste Krümmung hat, — dass, wenn man den Krümmungshalbmesser der letztern $= r$ setzt, mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnungen

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos \varphi^2}{r}$$

ist, und dass endlich nur diejenigen Normalen die Normale durch den Berührungspunkt schneiden, welche durch Punkte der Curve von der grössten Krümmung gezogen werden, die Normalen aber durch Punkte der Curve von keiner Krümmung mit der gedachten Normale parallel laufen.

Von Flächen der zweiten Ordnung.

§. 110. Der in §. 107. in Betrachtung gezogene Ausdruck der zweiten Ordnung:

$$A + tB + uC + (it^2 + ktu + lu^2) D$$

ist, wenn t und u nicht bloss, wie dort, unendlichklein, sondern in ihrer ganzen Ausdehnung genommen werden, der Ausdruck einer Fläche der zweiten Ordnung auch im gewöhnlichen Sinne. Der Beweis dafür wird in dem folgenden Capitel gegeben werden. Diesen aber voraus-

gesetzt, lassen sich schon jetzt die Merkmale bestimmen, aus denen die Art einer solchen Fläche erkannt werden kann.

Zu diesem Ende haben wir fürs erste die Coëfficientensumme des Ausdrucks näher zu untersuchen, welche, nach u geordnet und mit s bezeichnet, sich also schreiben lässt:

$$s = lu^2 + (kt+1)u + it^2 + t + 1.$$

So wie nun allgemein

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}(v^2 + d),$$

wo $v = 2ax + b$ und $d = 4ac - b^2$: so wird

$$s = \frac{1}{4l}(v^2 + d), \text{ wo } v = 2lu + kt + 1$$

und $d = 4l(it^2 + t + 1) - (kt+1)^2$

$$= (4il - k^2)t^2 + 2(2l - k)t + 4l - 1 = \frac{w^2 + e}{4(4il - k^2)},$$

wo $w = 2(4il - k^2)t + 2(2l - k)$

und $e = 4(4il - k^2)(4l - 1) - 4(2l - k)^2$

$$= 16l(4il - k^2 - i + k - l).$$

Hiermit wird $s = \frac{1}{4l}\left[v^2 + \frac{w^2 + e}{4(4il - k^2)}\right]$,

wo v und w lineäre Functionen von t und u sind.

Nun giebt es drei Hauptarten von Flächen der zweiten Ordnung: das Ellipsoid, welches auf einen endlichen Raum beschränkt ist, und zwei, sich in das Unendliche erstreckende, Hyperboloide, das elliptische und das hyperbolische, von denen das erstere ganz auf einerlei Seite jeder Berührungsebene liegt, das letztere aber von einer solchen zugleich geschnitten wird.

Sind die Hyperboloide zugleich Revolutionsflächen, so entsteht das elliptische durch Umdrehung einer Hyperbel um die Hauptaxe, das hyperbolische durch Umdrehung um die zugeordnete Axe.

Die durch den Ausdruck dargestellte Fläche ist demnach ein Ellipsoid, wenn s niemals $=0$ werden kann, also wenn $4il-k^2$ und e positiv sind, d. h. wenn $4il>k^2$ und $4il-k^2-i+k-l$ mit l und folglich auch mit i einerlei Zeichen hat. Denn wegen $4il>k^2$ müssen i und l einerlei Zeichen haben.

Die Fläche ist zweitens ein elliptisches Hyperboloid, wenn $s=0$ werden kann, und $4il>k^2$ ist (§. 107.), folglich wenn $4il>k^2$ ist, und $4il-..+k-l$ das entgegengesetzte Zeichen von i und l hat.

Endlich wird die Fläche ein hyperbolisches Hyperboloid seyn, wenn $4il<k^2$ ist, mag e das positive oder negative Zeichen haben.

In dem besondern Falle, wo $4il-k^2-i+k-l=0$, ist die Fläche ein Paraboloid, und zwar wiederum ein elliptisches oder hyperbolisches, nachdem $4il>$ oder $<k^2$. Bei ersterem ist daher s der Summe zweier Quadrate gleich und kann nur, wenn v und w zugleich $=0$ sind, verschwinden, so dass sich das ell. Paraboloid nur nach der einzigen, durch $v=0$ und $w=0$ bestimmten, Richtung in das Unendliche ausdehnt. Bei dem hyp. Par. wird s der Differenz zweier Quadrate gleich, folglich in zwei Factoren auflösbar, und kann daher für unendlich viel zusammengehörige Werthe der Veränderlichen null werden.

Ein noch speciellerer Fall ist der, wo $4il-k^2=0$, und mithin die Berührung in einer geraden Linie geschieht. In der That wird alsdann der Coëfficient von D, $=\frac{v^2}{4l}$, wo $v=2lu+kt$, und der Ausdruck reducirt sich auf

$$4lA+4ltB+2(v-kt)C+v^2D,$$

gehört also einer Kegelfläche an, deren leitende Linie $4lA+2vC+v^2D$ ($\equiv lA+xC+x^2D$, für $v=2x$), und deren Spitze $2lB-kC$ ist.

Wenn endlich nicht nur $4il-k^2$, sondern auch $4il-k^2-i+k-l=0$ ist, so findet sich $k=2i=2l$, und die Spitze jener Kegelfläche wird $\equiv B-C$, also unendlich entfernt; d. h. der vorige Kegel geht in einen Cylinder über, dessen leitende Linie dieselbe ist, wie die des Kegels, und dessen erzeugende Linie sich parallel mit der F.linie BC bewegt.

§. 111. Der Ausdruck für die Flächen der zweiten Ordnung:

$$A+tB+uC+(it^2+ktu+lu^2)D$$

lässt sich in dem Falle, wo der trinomische Coëfficient von D in zwei Factoren aufgelöst werden kann, und mithin die zugehörige Fläche ein hyp. Hyperboloid ist, auf eine sehr einfache Form bringen. Denn seyen diese Factoren:

$$it+au=x,\ t+bu=y,\ \text{also}\ it^2+..=xy,$$

so kann man umgekehrt t und u als lineäre Functionen von x und y darstellen, und der Ausdruck wird, wenn man x und y als Veränderliche einführt, die Form erhalten:

$$A+(cx+dy)B+(ex+fy)C+xyD.$$

Wird nun noch $cB+eC=\beta B,$ und $dB+fC=\gamma C,$ gesetzt, und nimmt man $B,, C,$ statt B, C zu F.punkten, so kommt der Ausdruck:

$$A+\beta xB,+\gamma yC,+xyD,$$

oder noch etwas einfacher, wenn man für x und y, $\frac{x}{\beta}$ und $\frac{y}{\gamma}$ schreibt, $\frac{1}{\beta\gamma}=\delta$ setzt, und an B und C die nicht mehr nöthigen Accente weglässt:

I. $A + xB + yC + \delta xyD$.

Die berührende F.ebene und der Berührungspunkt A sind hierbei unverändert geblieben; dagegen sind die jetzigen F.linien AB und AC zugleich diejenigen, in denen die Fläche von der an A gelegten Ber.ebene geschnitten wird. Denn für $y = o$ reducirt sich der Ausdruck auf $A + xB$, und für $x = o$ auf $A + yC$. Die zwei Durchschnitte der Fläche mit der Ber.ebene in A sind folglich Gerade.

Dasselbe gilt aber auch von jeder andern Ber.ebene. Denn seyen für irgend einen Punkt der Fläche: $x = x'$, $y = y'$; so kommt, wenn man in dem Ausdrucke der Fläche das einemal $x = x'$ setzt, und y als Veränderliche beibehält, das andremal $y = y'$ setzt, und x veränderlich lässt:

$$(1) \quad A + x'B + yC + \delta x'yD,$$

$$(2) \quad A + xB + y'C + \delta y'xD,$$

die Ausdrücke zweier durch jenen Punkt gehender und in der Fläche selbst liegender gerader Linien. Da nun die Ebene durch die Tangenten, welche an zwei auf einer Fläche gezogene Linien in ihrem Durchschnittspunkte gelegt werden, die Ber.ebene der Fläche in diesem Punkte ist, eine Gerade aber in jedem ihrer Punkte sich selbst zur Tangente hat, so wird die durch die Geraden (1) und (2) gelegte Ebene die berührende in jenem Punkte seyn, und mithin die Fläche in diesen zwei Geraden schneiden. *)

*) In der That findet sich auch nach §. 105. der Ausdruck der Ber.ebene in dem Punkte, für welchen $x = x'$ und $y = y'$ ist:

$$A + (x' + v)B + (y' + w)C + \delta(x'y' + y'v + x'w)D,$$

oder einfacher, wenn man $x' + v$, $y' + w$ zu den Veränderlichen nimmt und $= x$, y setzt:

$$A + xB + yC + \delta(y'x + x'y - x'y')D,$$

ein Ausdruck, der sich für $x = x'$ auf (1), und für $y = y'$ auf (2) reducirt.

Durch jeden Punkt des hyperbolischen Hyperboloids können also zwei in der Fläche selbst liegende Gerade gezogen werden. Alle diese Geraden aber bilden zwei Systeme von der Beschaffenheit, dass jede Gerade des einen Systems jede Gerade des andern schneidet. Das Hyperboloid kann daher immer durch die Bewegung einer Geraden, und zwar auf doppelte Weise, erzeugt werden.

Aber auch umgekehrt: *Hat man drei Gerade, von denen keine zwei in einer Ebene liegen, so wird eine vierte Gerade, dergestalt bewegt, dass sie die drei erstern fortwährend schneidet, ein hyperbolisches Hyperboloid erzeugen.*

Denn seyen AB und CD zwei jener drei Geraden. Eine sie schneidende Gerade hat den Ausdruck (§. 56. I. 1.):

$$(A) \quad mxA + xB + nC + D,$$

wo m und n noch unbestimmte Constanten sind, die wir jetzt so bestimmen wollen, dass die Gerade (A) durch einen bestimmten Punkt P der Geraden

$$(B) \quad (a + a'y)A + (b + b'y)B + yC + D$$

gehe. Für den bestimmten Werth, den die Veränderliche y im Ausdrucke (B) für P hat, muss daher seyn:

$$n = y, \; mx = a + a'y, \; x = b + b'y, \text{ also } m = \frac{a + a'y}{b + b'y}.$$

Substituirt man diese Werthe für m und n im Ausdrucke (A), und nimmt, der Einfachheit willen, statt x eine andere Veränderliche z, so dass $x = (b + b'y)z$, so erhält man den Ausdruck für die gesuchte Gerade, welche AB und CD schneidet und durch P geht:

$$(a + a'y)zA + (b + b'y)zB + yC + D.$$

Lässt man nun y nicht mehr einen bestimmten Werth haben, sondern veränderlich seyn, so umfasst der gefun-

dene Ausdruck alle durch AB, CD und (B) zugleich gehenden Geraden, ist folglich der Ausdruck der Fläche, welche durch die Bewegung einer Geraden erzeugt wird, deren leitende Linien die drei Geraden AB, CD und (B) sind.

Es reducirt sich aber der Ausdruck, wenn man D, C, $aA+bB$ und $a'A+b'B$ zu F.punkten nimmt, auf die Form des Ausdrucks I.; mithin ist die ihm zugehörige Fläche ein hyp. Hyperboloid.

§. 112. Das hyperbolische Paraboloid ist als eine besondere Art des hyp. Hyperboloids zu betrachten, indem ersteres aus letzterem entsteht, wenn die Summe der Coëfficienten im Ausdrucke des letztern in zwei Factoren auflösbar wird, also bei dem vereinfachten Ausdrucke I., wenn $\delta=1$ wird. Der Ausdruck für das hyp. Paraboloid ist daher:

$$\text{II.}\quad A+xB+yC+xyD.$$

Auch bei dieser Fläche lassen sich durch jeden ihrer Punkte zwei in ihr selbst begriffene Gerade ziehen:

$$A+xB+y'C+y'xD,$$
$$A+x'B+yC+x'yD.$$

Die erstere derselben schneidet die F.linien AC und BD, und liegt in einer mit AB und CD parallelen Ebene; die letztere schneidet AB und CD, und liegt in einer Ebene, welche mit AC und BD parallel ist. Vergl. §. 56. zu Ende.

Das hyperbolische Paraboloid enthält demnach zwei Systeme gerader Linien von derselben Beschaffenheit, wie bei dem Hyperboloid, nur mit dem Zusatze, dass die Geraden eines jeden Systems mit einer Ebene parallel sind, oder, was auf dasselbe hinaus-

kömmt, dass sie drei mit einer Ebene parallele (zum andern System gehörige) *Gerade schneiden.*

Dass auch umgekehrt *ein hyperbolisches Paraboloid immer erzeugt werde, wenn eine Gerade mit einer gegebenen Ebene parallel bewegt wird, und dabei durch zwei gegebene Gerade geht, oder wenn sie drei, mit einer und derselben Ebene parallele Gerade zu leitenden Linien hat,* wird man leicht selbst finden.

Aus diesen Eigenschaften des hyp. Hyperboloids und hyp. Parab. ziehen wir zum Schlusse noch den Satz:

Hat man drei Gerade a, b, c, von denen keine zwei in einer Ebene liegen, und vier oder mehrere andere Gerade $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$, deren jede von a, b, c zugleich geschnitten wird, so wird jede Gerade d, welche von den Geraden $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ irgend drei α, β, γ schneidet, auch alle übrigen $\delta, \ldots$ schneiden. — Sind dabei a, b, c mit einer Ebene parallel, so wird mit derselben Ebene auch d parallel laufen, und die Geraden $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ werden ebenfalls mit einer Ebene parallel seyn.

Von abwickelbaren Flächen.

§. 113. Der Ausdruck

$$(A) \quad (pv+q)A+(rv+s)B+vC+D$$

ist, wenn p, q, r, s constant und v veränderlich genommen werden, der allgemeine Ausdruck einer geraden Linie (§. 47.). Lässt man aber p, q, r, s beliebige Functionen einer zweiten, von v unabhängigen Veränderlichen w seyn, so wird (A) der allgemeine Ausdruck einer durch die Bewegung einer Geraden erzeugten Fläche. Vergl. §. 101.

Der obige Ausdruck für das hyp. Hyperboloid giebt hierzu ein Beispiel ab. Für diese Fläche sind p, q, r, s

lineäre Functionen von w, und folglich der Ausdruck (A) auch dann einer Geraden angehörig, wenn v constant und w veränderlich genommen wird; daher diese Fläche auf doppelte Weise von einer Geraden beschrieben werden kann. Auch sieht man leicht, wie dann der Ausdruck (A) durch Annahme anderer F.punkte auf die einfache Form I. in §. 111. sich zurückführen lässt.

§. 114. Die, bei Erzeugung der Fläche (A) auf die Gerade

$$(pv+q)A+(rv+s)B+vC+D$$

nächstfolgende, Gerade ist:

$$[(p+dp)x+q+dq]A+[(r+dr)x+s+ds]B+xC+D.$$

Zwei solcher nächstfolgender Geraden schneiden im Allgemeinen einander nicht. Geschieht dieses aber irgend einmal, so hat man für den Durchschnittspunkt (§. 48.) $v=x$, und:

$$vdp+dq=o,\ vdr+ds=o, \text{ also } dp:dq=dr:ds,$$

woraus sich die dem Durchschnitte zugehörigen Werthe von v und w bestimmen lassen.

Sollen daher stets je zwei auf einander folgende Lagen der erzeugenden Linie einander schneiden, oder überhaupt in einer Ebene liegen, so muss, unabhängig von einem bestimmten Werthe für w, zwischen den Differentialen der vier Functionen p, q, r, s eine geometrische Proportion statt finden.

In diesem Falle kann man sich die ganze Fläche aus ebenen Elementen zusammengesetzt vorstellen, welche von unbegrenzter Länge, aber unendlich kleiner Breite sind und mit ihren langen Seiten an einander grenzen. Denkt man sich das erste dieser Elemente um seine gerade Durchschnittslinie mit dem zweiten gedreht, bis es in die Ebene des zweiten fällt; hierauf die zwei ersten

Elemente zusammen um den Durchschnitt des zweiten und dritten, bis sie in die Ebene des dritten fallen, u. s. w.: so wird die Fläche nach und nach abgewickelt und in eine Ebene ausgebreitet. Man nennt daher Flächen dieser Art abwickelbare Flächen.

Um den allgemeinen Ausdruck derselben zu erhalten, setze man zufolge der obigen Proportion:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{dq}{ds} = z,$$

und es wird $p = \int z dr$, $q = \int z ds$; folglich wenn man diese Integrale für p und q in dem Ausdrucke (A) substituirt:

$$\text{I.} \quad (v\int z dr + \int z ds) A + (rv + s) B + vC + D,$$

wo r, s, z beliebige Functionen der Veränderlichen w sind.

§. 115. Der Ausdruck einer abwickelbaren Fläche lässt sich noch unter einigen andern Formen darstellen, die sowohl durch geometrische Betrachtungen, als auch durch analytische Umformungen des Ausdrucks I. gefunden werden können.

Zuerst kann man sich alle die verschiedenen Ebenen, in welchen die ebenen Elemente der Fläche enthalten sind, als die Lagen einer nach einem gewissen Gesetze bewegten Ebene denken, und mithin die Lagen der erzeugenden Linie als die Durchschnitte je zweier nächstfolgenden Lagen der bewegten Ebene ansehen.

Sey nun der Ausdruck dieser Ebene (§. 51.):

$$(B) \quad (u + tx + zy) A + yB + xC + D,$$

wo t, u, z für dieselbe Ebene constant, von einer zur andern aber veränderlich sind. Nimmt man daher t, u, z als beliebige Functionen einer Veränderlichen w, so ist die nächstfolgende Ebene:

$$[u + du + (t + dt) x + (z + dz) y] A + yB + xC + D,$$

und für den Durchschnitt derselben mit der vorigen (§. 53.):

$$du + x dt + y dz = 0.$$

Hiermit das y aus dem einen oder andern Ausdrucke eliminirt, ergiebt sich der Ausdruck der Durchschnittslinie oder der erzeugenden Geraden, also auch der erzeugten abwickelbaren Fläche.

$$\text{II.}\quad \left[u + tx - z\left(\frac{du}{dz} + x\frac{dt}{dz}\right)\right] A - \left(\frac{du}{dz} + x\frac{dt}{dz}\right) B + xC + D.$$

Man bemerke dabei noch, dass die Ebene (B) in jeder ihrer Lagen die Fläche II. berührt, und mithin die Fläche selbst die einhüllende Fläche des von der Ebene durchlaufenen Raums ist.

§. 116. Alle die Punkte, in denen sich je zwei nächstfolgende Lagen der eine abwickelbare Fläche erzeugenden geraden Linie schneiden, bilden eine Linie von doppelter Krümmung, die sogenannte Wendungscurve der Fläche, (*arête de rebroussement*), von welcher die Geraden selbst die Tangenten sind. Denn in jeder dieser Geraden liegen zwei auf einander folgende Punkte der Curve, der eine, in welchem die Gerade von der nächstvorhergehenden, der andere, in welchem sie von der nächstfolgenden Geraden geschnitten wird. Man kann sich daher eine abwickelbare Fläche auch durch Fortbewegung einer Tangente an einer Linie von doppelter Krümmung erzeugt vorstellen und dadurch noch auf folgende Weise zu dem allgemeinen Ausdrucke dieser Flächen gelangen.

Sey der Ausdruck der Wendungscurve

$$(C)\quad tA + uB + zC + D,$$

wo t, u, z beliebige Functionen einer Veränderlichen w, folglich auch t und u Functionen von z sind. Hiernach ist für ein bestimmtes z der Ausdruck der an die Curve gelegten Tangente:

$$\text{III.}\quad \left(t+x\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z}\right)A+\left(u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)B+(z+x)\,C+D,$$

und dieser folglich der Ausdruck einer abwickelbaren Fläche, sobald man nächst x auch z veränderlich nimmt.

§. 117. Ich will nun noch zeigen, wie sich die Ausdrücke II. und III. aus I. auch durch analytische Operationen ableiten lassen. Zu dem Ende setze ich zuerst

$$r\mathrm{d}z=-\mathrm{d}t,\quad s\mathrm{d}z=-\mathrm{d}u,$$

und es wird: $r=-\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z},\quad s=-\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z},$

$$p=\int z\mathrm{d}r=zr-\int r\mathrm{d}z=-z\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z}+t,$$

$$q=\int z\mathrm{d}s=zs-\int s\mathrm{d}z=-z\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}+u.$$

Die Substitution dieser Werthe in dem Ausdrucke I., giebt aber den Ausdruck II.

Weil es ferner nur darauf ankommt, dass die Differentiale der vier Functionen p, q, r, s in einer geometrischen Proportion stehen, so muss, wenn der Ausdruck $(pv+q)A+(rv+s)B+..$ einer abwickelbaren Fläche angehört, dasselbe auch mit dem Ausdrucke $(p+rv)A+(q+sv)B+vC+D$ der Fall seyn. Substituirt man nun im letztern Ausdrucke die für p, q, r, s bemerkten Werthe, so kommt:

$$\left[t-(z+v)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z}\right]A+\left[u-(z+v)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right]B+vC+D,$$

welcher Ausdruck sich auf III. reducirt, wenn man $z+v$ statt v zur Veränderlichen nimmt, und hierauf z negativ setzt.

Neuntes Capitel.

Verwandlung barycentrischer Ausdrücke in Gleichungen zwischen parallelen Coordinaten und umgekehrt.

§. 118. **Aufgabe.** Von den Punkten $A, B, C, D, ..$ sind in Bezug auf ein beliebiges System dreier Axen X, Y, Z die Coordinaten gegeben. In Bezug auf dasselbe Axensystem die Coordinaten des Punktes

$$P \equiv pA + qB + rC + sD + ...$$

zu finden.

Auflösung. Heissen die gegebenen Coordinaten von $A, B, C, ...$ resp.: a, a', a''; b, b', b''; c, c', c''; u. s. w., und die von P gesuchten: x, y, z. Nun bedeutet nach §. 13. und §. 8. der Ausdruck $P \equiv pA + qB + ...$ nichts anders, als dass, wenn man durch die Punkte P, $A, B, C, ...$ nach einer beliebigen Richtung Parallelen zieht, und diese durch eine willkührlich gelegte Ebene in $P', A', B', C', ...$ schneidet,

$$p.AA' + q.BB' + r.CC' + .. = (p + q + r + ..) PP'$$

ist. Man gebe daher erstlich den Parallelen die Richtung der Axe X, und nehme zu der schneidenden Ebene die Ebene YZ, so sind jene Abschnitte die mit X parallelen Coordinaten selbst, also $AA' = a$, $BB' = b$, $CC' = c$, u. s. w., und $PP' = x$, folglich

und
$$pa+qb+rc+\ldots=(p+q+r+\ldots)x$$

$$x=\frac{pa+qb+rc+\ldots}{p+q+r+\ldots}.$$

Auf eben die Art findet sich, wenn man die Parallelen parallel mit der Axe Y oder Z nimmt, und zur schneidenden Ebene die Ebene ZX oder XY wählt:

$$y=\frac{pa'+qb'+rc'+\ldots}{p+q+r+\ldots},\quad z=\frac{pa''+qb''+rc''+\ldots}{p+q+r+\ldots}.$$

§. 119. Zusatz. Sind die Punkte $A, B, C, \ldots$ und mithin auch P in einer und derselben Ebene enthalten, so hat man, wenn diese Ebene zur Ebene XY genommen wird, $a'', b'', c'', \ldots z=0$, und der Punkt P ist schon durch die Coordinaten

$$x=\frac{pa+qb+rc+\ldots}{p+q+r+\ldots},\quad y=\frac{pa'+qb'+rc'+\ldots}{p+q+r+\ldots}$$

bestimmt.

Liegen aber sämmtliche Punkte in einer geraden Linie, und nimmt man dieselbe zur Axe X, so sind nicht nur $a'', b'', c'', \ldots z=0$, sondern auch $a', b' c', \ldots y=0$, und P wird allein durch die Gleichung

$$x=\frac{pa+qb+rc+\ldots}{p+q+r+\ldots}$$

gefunden, wo $a, b, c, \ldots x$ die Abstände der Punkte $A, B, C, \ldots P$ von einem in der Linie beliebig gewählten Anfangspunkte bezeichnen.

§. 120. Aufgabe. Ein Punkt P in einer geraden Linie ist durch seinen Abstand x von einem beliebigen Anfangspunkte der Linie gegeben. Den Ausdruck von P in Bezug auf zwei, in derselben Linie enthaltene und durch ihre Abstände a, b vom Anfangspunkte ebenfalls gegebene, F.punkte A, B zu finden.

Auflösung. Man setze $P \equiv pA + qB$, so ist nach dem Vorigen:

$$x = \frac{pa + qb}{p + q}, \text{ folglich } p(x - a) + q(x - b) = 0,$$

und $p : q = x - b : -(x - a)$, folglich $P \equiv (x - b)A - (x - a)B$.

§. 121. Zusätze. *a.* Weil $AP = x - a$ und $BP = x - b$, so verhält sich $AP : PB = x - a : -(x - b)$, woraus nach §. 22. *b.* derselbe Ausdruck für P hervorgeht.

b. Nimmt man den einen der beiden F.punkte, z. B. B, selbst zum Anfangspunkte, so ist $b = 0$, $a = BA$, und die Formeln werden:

$$\text{I.} \quad x = \frac{p \,.\, BA}{p + q}; \quad p : q = \frac{x}{BA} : 1 - \frac{x}{BA}.$$

§. 122. Aufgabe. Von einem Punkte P in einer Ebene und von drei in derselben liegenden F.punkten A, B, C seyen die Coordinaten auf ein beliebiges in der Ebene enthaltenes System zweier Axen bezogen: x, y; a, a'; b, b'; c, c'. Den Ausdruck von P durch A, B, C zu finden.

Auflösung. Man setze $P \equiv pA + qB + rC$, so ist nach §. 119.:

$$p(x - a) + q(x - b) + r(x - c) = 0,$$
$$p(y - a') + q(y - b') + r(y - c') = 0.$$

Hieraus folgt: $p : q : r = (x - b)(y - c') - (x - c)(y - b') : (x - c)(y - a') - (x - a)(y - c') : (x - a)(y - b') - (x - b)(y - a')$,

und es ist nur noch übrig, diese den p, q, r proportionalen Grössen in dem für P angenommenen Ausdrucke: $pA + qB + rC$ zu substituiren.

§. 123. Zusätze. *a.* Es ist in §. 23. bewiesen worden, dass die Coëfficienten p, q, r den Dreiecken PBC, PCA, PAB proportional sind. Dasselbe zeigt sich auch

hier, indem durch die dem p proportionale Grösse: $(x-b)(y-c')-(x-c)(y-b')$, wenn die Axen sich rechtwinklich schneiden, das Doppelte des Dreiecks PBC ausgedrückt wird. Schneiden sich aber die Axen unter irgend einem andern Winkel, so ist jene Grösse dem Doppelten des Dreiecks PBC, dividirt durch den Sinus des Axenwinkels, gleich.

b. Um die Formeln einfacher, und dadurch zu den künftigen Anwendungen geschickter zu machen, wollen wir zwei der drei F.linien selbst, z. B. CA und CB, zu den Axen X und Y nehmen. Alsdann sind: c, c', a', $b=0$, $a=CA$, $b'=CB$, und es werden:

$$\text{II.}\quad x=\frac{p\,.\,CA}{p+q+r},\quad y=\frac{q\,.\,CB}{p+q+r},$$

$$p:q:r=\frac{x}{CA}:\frac{y}{CB}:1-\frac{x}{CA}-\frac{y}{CB}.$$

c. Ohne zu der eigentlichen Bedeutung eines barycentrischen Ausdrucks zurückzukehren, kann man diese letztern Formeln auch folgendergestalt herleiten. — Man lege durch P eine Parallele mit CB, welche CA in M schneide; so ist $CM=x$, und es verhält sich:

$$CM:CA=x:CA=CMB:CAB.\quad (\S.\ 18.\ b.)$$

Weil aber M und P in einer Parallele mit CB liegen, so ist $CMB=CPB=PBC$, und daher

$$x:CA=PBC:ABC=p:p+q+r.\quad (\S.\ 23.)$$

Eben so findet sich, wenn man durch P eine Parallele mit CA legt, der obige Werth für die Coordinate y.

§. 124. Aufgabe. Ein Punkt P im Raume ist durch drei Coordinaten x, y, z in Bezug auf ein beliebiges System dreier Axen gegeben; eben so vier F.punkte A, B, C, D in Bezug auf dasselbe System durch ihre Coor-

dinaten: a, a', a''; b, b', b''; c, c', c''; d, d', d''. Den Ausdruck von P durch A, B, C, D zu finden.

Auflösung. Man setze $P \equiv pA + qB + rC + sD$, so ist nach §. 118.:

$$p(x-a)+q(x-b)+r(x-c)+s(x-d)=0,$$
$$p(y-a')+q(y-b')+r(y-c')+s(y-d')=0,$$
$$p(z-a'')+q(z-b'')+r(z-c'')+s(z-d'')=0,$$

woraus sich das gegenseitige Verhältniss von p, q, r, s bestimmen lässt. Bezeichnet man nämlich mit $[bcd]$ eine Function, die eben so aus $x-b$, $x-c$, $x-d$, $y-b'$, ... zusammengesetzt ist, als es in §. 50. *a.* bei einer ganz ähnlichen Rechnung, (bcd) aus $b, c, d, b', c', \ldots$ war, u. s. w.: so verhalten sich:

$$p:q:r:s = [bcd] : -[cda] : [dab] : -[abc].$$

§. 125. Zusätze. *a.* Nach §. 25. verhalten sich die Coëfficienten $p:q:r:s$ wie die Pyramiden $PBCD$: $-PCDA : PDAB : -PABC$. Uebereinstimmend damit ist hier die Function $[bcd]$ bei einem rechtwinklichen Axensystem dem sechsfachen der Pyramide $PBCD$ gleich; bei einem schiefwinklichen aber dem sechsfachen der Pyramide $PBCD$, dividirt durch das Product aus dem Sinus des Winkels irgend zweier der drei Axen in den Sinus des Winkels, welchen die dritte Axe mit der Ebene der beiden erstern bildet. *)

*) Dieses Product kann wiederum als das sechsfache einer Pyramide betrachtet werden, deren eine Spitze der Anfangspunkt der Coordinaten ist, und deren drei übrige Spitzen in den Axen selbst liegen, jede vom Anfangspunkte um die zur Einheit angenommene Länge entfernt. — Bezeichnet man die drei Winkel, welche die Axen mit einander bilden, durch α, β, γ, so erhält das Product den symmetrischen Ausdruck:

$$\sqrt{(1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2)}.$$

b. Zu ganz einfachen Formeln gelangt man, wenn man drei der F.linien, z. B. DA, DB, DC zu den Axen X, Y, Z nimmt. Hierdurch werden: $d, d', d'', a', a'', b, b'', c, c' = 0$, $a = DA$, $b' = DB$, $c'' = DC$, und es ergiebt sich:

$$\text{III.}\quad x = \frac{p.DA}{p+q+r+s},\quad y = \frac{q.DB}{p+q+r+s},\quad z = \frac{r.DC}{p+q+r+s},$$

$$p:q:r:s = \frac{x}{DA} : \frac{y}{DB} : \frac{z}{DC} : 1 - \frac{x}{DA} - \frac{y}{DB} - \frac{z}{DC}.$$

c. Man lege durch P eine Ebene parallel mit BCD, welche DA in M schneide, so ist $DM = x$, und es verhält sich:

$$DM : DA = x : DA = DMBC : DABC.\ (\S.\ 20.\ b.)$$

Es liegen aber P und M in einer mit BCD parallelen Ebene; folglich ist $DMBC = DPBC$, und

$$x : DA = PBCD : ABCD = p : p+q+r+s,\ (\S.\ 25.)$$

wie vorhin. Auf eben die Art lassen sich auch die Werthe von y und z, unabhängig von den allgemeinen Formeln in §. 118., finden.

§. 126. Sämmtliche Formeln, durch welche die barycentrische Bestimmungsart eines Punktes auf die gewöhnliche Bestimmung durch Coordinaten reducirt wird, lassen sich noch etwas einfacher darstellen, wenn man zuvor jeden Coëfficienten des Ausdrucks durch die Summe aller dividirt. Denn heissen die dadurch entstehenden neuen Coëfficienten $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \ldots$, so dass:

$$\mathfrak{p} = \frac{p}{p+q+r+..},\quad \mathfrak{q} = \frac{q}{p+q+r+..},\quad \mathfrak{r} = \frac{r}{p+q+r+..},$$

u. s. w.

also $\mathfrak{p}+\mathfrak{q}+\mathfrak{r}+.. = 1$ und $P = \mathfrak{p}A + \mathfrak{q}B + \mathfrak{r}C + ..,$

so verschwindet in den Formeln für die Coordinaten der Nenner. Insbesondere werden dadurch die Formeln I., II., III.:

I. $x = \mathfrak{p}.BA$, wo $P = \mathfrak{p}A + \mathfrak{q}B$;

II. $x = \mathfrak{p}.CA$, $y = \mathfrak{q}.CB$, wo $P = \mathfrak{p}A + \mathfrak{q}B + \mathfrak{r}C$;

III. $x = \mathfrak{p}.DA$, $y = \mathfrak{q}.DB$, $z = \mathfrak{r}.DC$, wo $P = \mathfrak{p}A + \mathfrak{q}B + \mathfrak{r}C + \mathfrak{s}D$;

oder geradezu:

I. $x = \mathfrak{p}$; II. $x = \mathfrak{p}$, $y = \mathfrak{q}$; III. $x = \mathfrak{p}$, $y = \mathfrak{q}$, $z = \mathfrak{r}$;

wenn man zur positiven Masseinheit jeder Coordinate die Entfernung nimmt, um welche von dem zum Anfangspunkt gewählten F.punkte der andere F.punkt absteht, welcher in der der Coordinate parallelen Axe liegt, und wenn man somit die Richtung einer jeden Axe von dem erstern F.punkte nach dem letztern hin als die positive festsetzt. Bei diesen Annahmen sind daher die Coordinaten den Coëfficienten selbst gleich.

So wie nun, wenn $P = \mathfrak{p}A + \mathfrak{q}B + \mathfrak{r}C$ ist, und CA, CB als Axen genommen werden, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ die Coordinaten von P sind: eben so sind $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ die Coordinaten desselben Punktes, wenn man AB, AC zu Axen nimmt; und $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{p}$ die Coordinaten für BC, BA als Axensystem. Ein jeder dreigliedrige Ausdruck für einen Punkt in einer Ebene lässt sich demnach als eine Zusammenstellung dreier Coordinatensysteme betrachten, von denen je zwei eine Axe gemeinschaftlich haben, und deren drei wesentlich verschiedene Axen das F.dreieck bilden.

Auf gleiche Art sind die Coëfficienten in dem viergliedrigen Ausdrucke für einen Punkt im Raume, nach vorangegangner Division durch die Summe der Coëfficienten, nichts anders, als die Coordinaten des Punktes auf vier verschiedene Systeme bezogen, deren Anfangs-

punkte die Spitzen, und deren Axen die Kanten der F.pyramide sind.

Handelt es sich endlich um einen in einer Geraden liegenden Punkt $P = \mathfrak{p}A + \mathfrak{q}B$, so ist $\mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{q}$ die Abscisse von P, je nachdem man B oder A zum Anfangspunkt nimmt.

§. 127. Die im Vorigen gemachten Annahmen, dass die F.linien zu Axen genommen, und die zu verschiedenen Axen gehörigen Coordinaten durch verschiedene Längeneinheiten gemessen werden, jede Coordinate nämlich durch den gegenseitigen Abstand der zwei in der ihr zugehörigen Axe liegenden F.punkte, diese Annahmen sollen, der einfachern Rechnung wegen, auch bei den nun folgenden Anwendungen geltend bleiben. So wie aber bisher die gegenseitigen Abstände der F.punkte unbeachtet gelassen wurden, so werden auch nunmehr nicht bloss die Axenwinkel, sondern auch das Verhältniss der Einheiten, womit die Coordinaten der verschiedenen Axen gemessen werden, unbestimmt bleiben. Die grössere Allgemeinheit, welche damit die gewöhnliche Bestimmung durch Coordinaten erlangt, wird späterhin den Gegenstand einer besondern Untersuchung ausmachen. Gegenwärtig werde nur noch bemerkt, dass, indem man die gegenseitigen Abstände der F.punkte, oder vielmehr das gegenseitige Verhältniss dieser Abstände unbestimmt lässt, auch die Winkel des F.dreiecks und der F.pyramide, und damit alle Winkel einer darauf bezogenen Figur, so wie alle andern von Winkelfunctionen abhängigen Verhältnisse unbestimmt bleiben, zu welchen letztern z. B. das Verhältniss zweier Geraden gehört, die nicht Theile einer und derselben Geraden sind.

§. 128. Nur dadurch, dass man die Abstände der F.punkte mit berücksichtigt und dieselben in die Coëf-

ficienten der F.punkte einführt, ist man vermögend, Punkte, Linien, etc. auszudrücken, deren Lage gegen die F.punkte durch Winkelfunctionen bestimmt ist. So findet sich z. B., wenn man die Seiten des F.dreiecks BC, CA, AB, resp. mit a, b, c bezeichnet,

$$P \equiv aA + bB + cC$$

als der Mittelpunkt des in das Dreieck ABC beschriebenen Kreises. Denn ist P der gedachte Punkt, so sind die Dreiecke PBC, PCA, PAB den halben Producten aus a, b, c in den Halbmesser des Kreises gleich und verhalten sich folglich wie $a:b:c$. Dasselbe Verhältniss giebt aber auch der Ausdruck zu erkennen.

Eben so wird man ohne Schwierigkeit finden, dass, wenn man den Punkt, in welchem sich die drei von den Spitzen auf die gegenüberstehenden Seiten des Dreiecks gefällten Perpendikel schneiden,

$$Q \equiv fA + gB + hC$$

setzt, der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises

$$R \equiv (g+h)A + (h+f)B + (f+g)C$$

ist, und, a, b, c in der vorigen Bedeutung genommen, sich verhalten muss:

$$f:g:h = \frac{1}{b^2+c^2-a^2} : \frac{1}{c^2+a^2-b^2} : \frac{1}{a^2+b^2-c^2}.$$

Hieraus ergiebt sich ferner sehr leicht:

$$Q + 2R = A + B + C = 3S,$$

woraus der bekannte Satz fliesst, dass in jedem Dreiecke der gemeinschaftliche Durchschnitt der Perpendikel von den Spitzen auf die gegenüberstehenden Seiten, Q, der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, R, und der Schwerpunkt des Dreiecks, S, in einer geraden Linie liegen, und dass $SQ = 2RS$ ist.

Doch will ich mich hierbei nicht länger aufhalten, da dergleichen Ausdrücke so wie bisher auch in der Folge nicht vorkommen werden.

§. 129. Aufgabe. Aus dem Ausdrucke einer Curve in einer Ebene die Gleichung der Curve zwischen parallelen Coordinaten zu finden, und umgekehrt aus der Gleichung den Ausdruck herzuleiten.

Auflösung. Sey der Ausdruck für die Curve:

$$pA + qB + rC,$$

wo p, q, r gegebene Functionen einer Veränderlichen v sind, so findet sich, CA und CB zu Axen und resp. Längenmaſsen genommen, die gesuchte Gleichung zwischen x und y, wenn man aus den Gleichungen

$$(p+q+r)x = p, \quad (p+q+r)\, y = q,$$

v eliminirt. — Für den umgekehrten Fall suche man x und y als, wo möglich rationale, Functionen einer dritten Veränderlichen v darzustellen, welche der gegebenen Gleichung zwischen x und y Genüge leisten. Diese Functionen für x und y in

$$\text{II}^*. \quad xA + yB + (1 - x - y)\, C$$

substituirt, erhält man den gesuchten Ausdruck. (§. 123. *b.*)

§. 130. Beispiele. 1) Es ist in §. 61. bewiesen worden, dass jeder Ausdruck für eine Curve der zweiten Ordnung durch Veränderung der F.punkte auf die einfache Form:

$$\alpha A + vB + v^2 C$$

zurückgeführt werden kann. Um nun die dieser Curve entsprechende Gleichung zu finden, setze man dem Vorigen gemäss:

$$(\alpha + v + v^2)\, x = \alpha, \quad (\alpha + v + v^2)\, y = v.$$

Hieraus folgt sogleich $v = \alpha\frac{y}{x}$, und wenn man damit v aus der einen oder andern dieser Gleichungen eliminirt:

$$x^2 + xy + \alpha y^2 = x,$$

die Gleichung für eine Linie der zweiten Ordnung auch im gewöhnlichen Sinne, d. h. für einen Kegelschnitt. Wie schon in §. 63. angedeutet wurde, so erhellet auch aus dieser Gleichung, dass die Linie eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, je nachdem $\alpha >, <, = \frac{1}{4}$ genommen wird.

Setzt man die Längen CA und CB, nach einem und demselben Mafsftab gemessen, resp. $= a$ und b, so hat man, wenn in der Gleichung die Coordinaten durch denselben Mafsftab ausgedrückt werden sollen, für x und y nur $\frac{x}{a}$ und $\frac{y}{b}$ zu substituiren, und man erhält:

$$b^2x^2 + abxy + \alpha a^2y^2 = ab^2x.$$

Das Kennzeichen, zu welcher Art von Kegelschnitten die Gleichung gehöre, $(\alpha >, <, = \frac{1}{4})$, wird hierdurch nicht geändert.

2) Sey folgender Ausdruck für eine Linie der dritten Ordnung gegeben:

$$A + vB + v^3C,$$

so ist: $(1 + v + v^3)x = 1$, $(1 + v + v^3)y = v$, folglich $v = \frac{y}{x}$, und wenn man damit v eliminirt:

$$x^3 + x^2y + y^3 = x^2.$$

Die Linie ist also auch ihrer Gleichung nach von der dritten Ordnung.

Die Fig. 28. giebt eine Abbildung dieser Curve. Sie hat (§. 78.) bei A einen Wendungspunkt und AB zur Tangente. Setzt man sodann

$v = \frac{1}{w}$, so wird der Ausdruck: $w^3 A + w^2 B + C$, und es erhellet aus §. 79., dass die Curve bei C eine Spitze der ersten Art bildet und von CB berührt wird. Endlich giebt der einzige in der Coëfficientensumme enthaltene Factor, $v + (0{,}68232 = a)$, zu erkennen, dass die Curve zwei, nach entgegengesetzten Richtungen sich erstreckende, unendliche Aeste mit einer geradlinigen Asymptote hat (§. 94.). Um letztere zu finden, setze man jenen Factor $v + a = z$, substituire $z - a$ für v im Ausdrucke der Curve und behalte bloss die erste Potenz von z bei. Dies giebt den Ausdruck der Asymptote:

$$A + (z - a) B + (3a^2 z - a^3) C.$$

Die Durchschnitte derselben mit den F.linien sind daher:

$$B + 3a^2 C,\ 2a^3 C + A,\ A - \tfrac{2}{3} aB,$$

oder $B + 1{,}397 C,\ C + 1{,}574 A,\ A - 0{,}455 B,$

wonach man die Asymptote leicht construiren kann.

3) Die Gleichung für die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist:

$$xy = k.$$

Um diese Gleichung in einen Ausdruck umzuwandeln, setze man $x = v$ und mithin $y = \frac{k}{v}$. Substituirt man diese Werthe in II*., so kommt nach Wegschaffung der Brüche:

$$v^2 A + kB + (v - v^2 - k) C,$$

der Ausdruck für eine Hyperbel, von welcher CA und CB, als die Axen des vorigen Coordinatensystems, die Asymptoten sind.

Etwas einfacher wird der Ausdruck, wenn man zur dritten F.linie AB, eine Tangente der Hyperbel nimmt. Nach §. 63. 2. muss alsdann der Coëfficient von C ein Quadrat, folglich $k = \frac{1}{4}$ seyn, und der Ausdruck wird:

$$v^2 A + \tfrac{1}{4} B - (v - \tfrac{1}{2})^2 C, \quad \text{oder} \quad w^2 A + B - (w + 1)^2 C,$$

wenn man $v = -\frac{1}{2} w$ setzt; der Ausdruck für eine Hy-

perbel, wo CA und CB die Asymptoten, und AB irgend eine Tangente ist. Für den Berührungspunkt der letztern ist $v = \frac{1}{2}$ oder $w = -1$, und folglich dieser Punkt selbst $\equiv A + B$, wonach, wie schon sonst bekannt, der zwischen den Asymptoten enthaltene Theil einer Tangente in dem Berührungspunkte halbirt wird.

Für $k = \frac{1}{4}$ wird die Gleichung der Hyperbel: $xy = \frac{1}{4}$, die zufolge des Vorigen von der Beschaffenheit seyn muss, dass die Gerade durch die beiden Punkte A, B, welche in den Asymptoten oder Axen von dem Anfangspunkte C um die resp. Längeneinheiten abstehen, die Hyperbel berührt. In der That ist die Gleichung dieser Geraden: $x + y = 1$, sie selbst aber eine die Hyperbel im Punkte $(x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2})$ berührende.

Nachträglich muss ich hier eine Erinnerung, die Summe der Coëfficienten betreffend, beifügen. Diese Summe ist im vorliegenden Beispiele, $= v$, indem sich die Quadrate von v gegenseitig aufheben; und es scheint hiernach, als ob die Curve bloss einen unendlich entfernten Punkt, den Punkt $B - C$ für $v = 0$, und mithin nur eine Asymptote BC hätte. Man bemerke aber, dass, so oft in der Summe der Coëfficienten eines Ausdrucks die höchsten Potenzen der Veränderlichen v sich aufheben, die Summe auch für $v = \infty$ als in Null übergehend betrachtet werden muss, indem für $v = \infty$ alle niedrigern Potenzen von v gegen die höchste nicht mehr in Betracht kommen. — So reducirt sich unser Ausdruck der Hyperbel, wenn nur die Quadrate von v beibehalten werden, auf $v^2 A - v^2 C$, und giebt dadurch das Daseyn noch einer zweiten Asymptote AC zu erkennen. — Will man das Unendliche nicht zu Hülfe nehmen, so substituire man, vor der Summirung der Coëfficienten, für v irgend eine gebrochene Function, und es wird nach Weg-

schaffung der Brüche die Summe der Coëfficienten auch den Nenner der Function als Factor enthalten, und folglich durch Annullirung desselben, als wodurch $\nu = \infty$ wird, ebenfalls $= 0$ werden. — Setzt man z. B. $\nu = \frac{1}{2} \frac{z+1}{z-1}$, so wird $\nu - \frac{1}{2} = \frac{1}{z-1}$, und hierdurch der vorige Ausdruck;

$$(z+1)^2 A + (z-1)^2 B - 4C,$$

wo die Summe der Coëfficienten $= 2(z^2 - 1)$, für $z = \pm 1$ null wird. Es giebt aber $z = 1$ die Asymptote AC, und $z = -1$ die Asymptote BC.

4) Sey die Gleichung für eine Ellipse zwischen zusammengehörigen Durchmessern $2a$ und $2b$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

in einen Ausdruck zu verwandeln. Um fürs erste x und y als rationale Functionen einer dritten Veränderlichen darzustellen, setze man $\frac{y}{b} = \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1 - \frac{x\nu}{a}$, und man erhält nach gehöriger Entwickelung: $x = \frac{2a\nu}{1+\nu^2}$, $y = \frac{b(1-\nu^2)}{1+\nu^2}$;

Diese Werthe in II*. substituirt, geben:

$$2a\nu A + b(1-\nu^2) B + [1 - b - 2a\nu + (1+b)\nu^2] C,$$

den Ausdruck einer Ellipse, deren Mittelpunkt C, und von welcher zwei zusammengehörige Durchmesser $2a$ und $2b$ in die F.linien CA und CB fallen. $2a$ und $2b$ sind daher in dem Ausdrucke als die Zahlenwerthe dieser Linien, erstere durch CA und letztere durch CB als Einheit gemessen, zu betrachten. Setzt man folglich $a = 1$, d. i. $= CA$, so wird A der Endpunkt eines Durchmessers, und es kommt der Ausdruck:

$$2\nu A + b(1-\nu^2)B + [(1-\nu)^2 - b(1-\nu^2)]\,C,$$

wo, wie gehörig (§. 63. 3.), die Coëfficienten von B und C einen gemeinschaftlichen Factor, $1-\nu$, haben. Setzt man noch $b=1$, d. i. $=CB$, so geht die Ellipse auch durch B, und der Ausdruck wird:

$$2\nu A + (1-\nu^2)B - 2\nu(1-\nu)\,C,$$

in welchem auch die Coëfficienten von B und C einen Factor, ν, gemein haben. Es ist dies also der Ausdruck einer Ellipse, von welcher die F.seiten CA und CB ihrer Lage und Grösse nach zwei zusammengehörige Halbmesser sind.

§. 131. Aufgabe. Aus dem Ausdrucke für eine Curve im Raume die beiden Gleichungen der Curve, und umgekehrt aus den Gleichungen derselben den Ausdruck zu finden.

Auflösung. Der Ausdruck für die Curve sey:

$$pA + qB + rC + sD,$$

wo demnach p, q, r, s gegebene Functionen einer Veränderlichen ν sind. Durch Elimination dieses ν aus den drei Gleichungen:

$$(p+q+r+s)\,x = p, \quad (p+q+r+s)\,y = q, \quad (p+q+r+s)\,z = r,$$

erhält man zwei Gleichungen zwischen den den F.linien DA, DB, DC parallelen Coordinaten x, y, z, welche Gleichungen die gesuchten für die Curve seyn werden.

Sind umgekehrt die zwei Gleichungen zwischen x, y, z, gegeben, so suche man drei, wo möglich rationale, Functionen einer Veränderlichen ν zu erhalten, die, resp. für x, y, z in die Gleichungen gesetzt, ihnen Genüge leisten. Die Substitution dieser Functionen in

$$\text{III*.} \quad xA + yB + zC + (1-x-y-z)\,D$$

giebt den gesuchten Ausdruck. (§. 125. b.)

§. 132. **Beispiele.** 1) Der allgemeine Ausdruck für die Linien der dritten Ordnung im Raume lässt sich (§. 96.) durch Veränderung der F.punkte immer auf die einfache Form:

$$aA + b\nu B + c\nu^2 C + d\nu^3 D$$

reduciren. Man setze nun: $a + b\nu + c\nu^2 + d\nu^3 = t$, so ist:

$$1)\ tx = a,\quad 2)\ ty = b\nu,\quad 3)\ tz = c\nu^2,$$

woraus sich sogleich

$$4)\ b^2xz = acy^2$$

als die eine Gleichung zwischen x, y, z ergiebt. Ferner ist: $t(x+y+z) = a + b\nu + c\nu^2 = t - d\nu^3$, und wenn man darin für ν^3 den aus 2) und 3) hervorgehenden Werth, $\frac{b}{c^2}\, t\, \frac{z^2}{y}$, substituirt:

$$5)\ c^2y(1 - x - y - z) = bdz^2,$$

die andere Gleichung für die Curve.

2) Seyen die zwei Gleichungen für eine Curve im Raume gegeben:

$$yz + zx + xy = 0,\quad xyz = 1.$$

Hieraus z eliminirt, erhält man:

$$x + y + x^2y^2 = 0.$$

Man setze nun $y = \nu x$, so wird letztere Gleichung nach geschehener Division mit x:

$$1 + \nu + \nu^2x^3 = 0,\ \text{woraus}$$

$$x = -\sqrt[3]{\frac{1+\nu}{\nu^2}},\quad y = -\sqrt[3]{\nu(1+\nu)},\quad z = \frac{1}{xy} = \sqrt[3]{\frac{\nu}{(1+\nu)^2}}$$

folgt. Hiermit sind nun zwar x, y, z als Functionen einer vierten Veränderlichen dargestellt, aber als irrationale Functionen derselben, die sich auch durch kein Mittel in rationale verwandeln lassen. Man kann daher

nichts weiter thun, als diese irrationalen Werthe für x, y, z im Ausdrucke III*. substituiren.

§. 133. Aufgabe. Aus dem Ausdrucke einer Fläche die Gleichung derselben, und umgekehrt aus der Gleichung den Ausdruck zu finden.

Auflösung. Der Ausdruck für die Fläche sey:

$$pA + qB + rC + sD,$$

wo p, q, r, s gegebene Functionen zweier Veränderlichen v und w sind. Eliminirt man diese beide aus den drei Gleichungen:

$$(p+q+r+s)\,x = p,\ (p+q+r+s)\,y = q,\ (p+q+r+s)\,z = r,$$

so ist die resultirende Gleichung zwischen x, y, z, die gesuchte für die Fläche.

Ist dagegen die Gleichung zwischen x, y, z gegeben, so suche man jede dieser drei Veränderlichen als eine, wo möglich rationale, Function zweier anderer v und w auf eine die Gleichung befriedigende Weise darzustellen, und man erhält durch Substitution dieser Functionen in

$$\text{III*}.\quad xA + yB + zC + (1 - x - y - z)\,D$$

den gesuchten Ausdruck.

§. 134. Beispiele. 1) Die Fläche, deren Ausdruck

$$A + tB + uC + (it^2 + ktu + lu^2)\,D,\ (\S.\ 110.)$$

gehört auch ihrer Gleichung nach zu der zweiten Ordnung. Um dieses darzuthun, setze man die Summe der Coëfficienten:

$$1 + t + u + it^2 + ktu + lu^2 = \sigma,$$

und es wird: $\sigma x = 1$, $\sigma y = t$, $\sigma z = u$, mithin

$$\sigma = \frac{1}{x},\quad t = \frac{y}{x},\quad u = \frac{z}{x},$$

und wenn man diese Werthe in der Gleichung für σ substituirt und dann gehörig ordnet:

$$x(1-x-y-z)=iy^2+kyz+lz^2,$$

die gesuchte Gleichung von der zweiten Ordnung.

2) Die Gleichung für das hyperbolische Hyperboloid ist, wenn man drei zusammengehörige Durchmesser zu den Axen *X*, *Y*, *Z*, und die Hälften derselben resp. zu den Längenmaſsen der ihnen parallelen Coordinaten nimmt:

$$x^2+y^2-z^2=1.$$

Um nun x, y, z als rationale Functionen zweier Veränderlichen auszudrücken, gebe man der Gleichung die Form: $(y+z)(y-z)=(1+x)(1-x)$. Setzt man demnach $y+z=w(1+x)$, so ist $y-z=\frac{1}{w}(1-x)$, woraus in Verbindung

$$2y=w(1+x)+\frac{1}{w}(1-x),\quad 2z=w(1+x)-\frac{1}{w}(1-x)$$

folgt. Man substituire diese Werthe für y und z in III*., und man bekommt für das Hyperboloid den Ausdruck:

$$2wxA+[w^2(1+x)+1-x]B+[w^2(1+x)-1+x]C$$
$$+2w[1-x-w(1+x)]D,$$

nach welchem die Fläche der dritten Ordnung anzugehören scheint. Allein man wird bald gewahr, dass sich der Ausdruck auf die zweite Ordnung bringen lässt, wenn man ihn mit $1+x$ dividirt und hierauf $\frac{1-x}{1+x}=u$ statt x für die eine Veränderliche nimmt; hierdurch wird er:

$$(1-u)wA+(w^2+u)B+(w^2-u)C+2w(u-w)D.$$

Noch etwas einfacher erhält man den Ausdruck, wenn man $u=vw$ setzt, und ihn somit durch w theilbar macht:

$$(1-vw)A+(w+v)B+(w-v)C-2w(1-v)D,$$

der Ausdruck für das hyperbolische Hyperboloid (§. 113.), von welchem D der Mittelpunkt, und DA, DB, DC, ihrer Lage und Grösse nach, drei zusammengehörige Halbmesser, die zwei erstern reell, der dritte imaginär, sind.

Setzt man in diesem Ausdrucke die Coëfficienten von C, B, A der Reihe nach $=0$, so bekommt man die Durchschnitte der Fläche mit den Coordinatenebenen DAB, DAC, DBC:

$$(1-v^2)A+2vB-2v(1-v)D, \text{ für } w=v;$$
$$(1+v^2)A-2vC+2v(1-v)D, \text{ für } w=-v;$$
$$(1+v^2)B+(1-v^2)C-2(1-v)D, \text{ für } w=\frac{1}{v},$$

oder wenn man $v=\frac{1+u}{1-u}$ setzt:

$$(1+u^2)B-2uC+2u(1-u)D.$$

Der erste dieser drei Ausdrücke entspricht der Gleichung $x^2+y^2=1$, und gehört demnach einer Ellipse, von welcher DA und DB zusammengehörige Halbmesser sind. (§. 130. 4.). Der zweite entspricht der Gleichung $x^2-z^2=1$, und gilt daher für eine Hyperbel, von welcher DA ein reeller und DC der zugehörige imaginäre Halbmesser ist. Eben so bezieht sich der dritte Ausdruck, dem die Gleichung $y^2-z^2=1$ zukommt, auf eine Hyperbel mit DB als reellen und DC als imaginären Halbmesser.

Setzt man endlich in dem Ausdrucke des Hyperboloids den Coëfficienten von D, $=0$, also $w=0$, oder $v=1$, so ergiebt sich der Durchschnitt der Fläche mit der Ebene ABC. Es kommt aber für $w=0$ die Linie $A+vB-vC$, d. h. eine durch A mit BC gezogene Parallele; für $v=1$ die Linie $(1-w)A+(1+w)B-(1-w)C$, d. h. eine Parallele mit AC durch B. Heisst daher E der Durchschnitt der beiden Parallelen, so ist $BCAE$ ein

Parallelogramm, dessen Ebene das Hyperboloid in den Seiten *AE*, *BE* schneidet und folglich in *E* berührt. (§. 111.) Dies liefert uns folgenden Satz:

Construirt man ein Octaëder, dessen sechs Spitzen die Endpunkte drei zusammengehöriger Durchmesser eines hyperbolischen Hyperboloids sind, so wird jede der acht Seitenflächen des Octaëders das Hyperboloid berühren, dergestalt, dass der Berührungspunkt einer Seitenfläche, mit den drei darin liegenden Endpunkten der Durchmesser ein Parallelogramm bildet, von welchem die Linie durch die Endpunkte der beiden reellen Durchmesser die eine Diagonale ist, und dass die in dem Berührungspunkte zusammenstossenden Seiten des Parallelogramms die zwei Geraden sind, in denen das Hyperboloid von der Ebene des Parallelogramms zugleich geschnitten wird.

§. 135. Wenn wir uns bisher nur mit solchen Ausdrücken für Linien und Flächen beschäftigten, deren Coëfficienten rationale Functionen der Veränderlichen waren, und in den eben vorgelegten Aufgaben bei Verwandlung der Gleichungen in Ausdrücke die Forderung machten, für letztere wo möglich rationale Coëfficienten zu erhalten zu suchen, so geschah dieses aus dem Grunde, weil sich aus solchen Ausdrücken die Eigenschaften der durch sie dargestellten Linien und Flächen am leichtesten herleiten lassen. Offenbar aber ist die Bedingung der Rationalität nichts wesentlich Nothwendiges, und man sieht bald, dass es unendlich mehr algebraische Linien und Flächen giebt, welche durch Ausdrücke mit rationalen Coëfficienten nicht dargestellt werden können, als solche, bei denen dieses möglich ist, und dass hinwiederum nur bei einem sehr kleinen Theile der erstern die Veränderlichen der Gleichung durch irrationale Functio-

nen darstellbar sind, wie in §. 132. 2., während bei dem ungleich grössern Theile derselben, wegen der Unvollkommenheit der Algebra, eine gesonderte Darstellung der Veränderlichen nicht einmal mit Anwendung irrationaler Formen möglich ist. Alsdann bleibt nichts übrig, als dem Ausdrucke seine allgemeine Form II*. oder III*. zu lassen, und die eine oder zwei gegebenen Gleichungen zwischen x, y oder x, y, z darunter zu schreiben.

Weil aber die rationalen Ausdrücke wegen der Leichtigkeit ihrer Behandlung den übrigen Ausdrücken immer vorzuziehen sind, und es auch in rein analytischer Hinsicht interessant ist, zu wissen, wenn die Veränderlichen einer Gleichung als rationale Functionen einer andern Veränderlichen angegeben werden können, so wollen wir gegenwärtig den Zusammenhang zwischen rationalen Ausdrücken und Gleichungen, und den Uebergang von den einen zu den andern etwas allgemeiner untersuchen, dabei aber, um nicht zu weitläufig zu werden, und nicht zu vielen Schwierigkeiten zu begegnen, bei Ausdrücken und Gleichungen bloss für Linien in Ebenen stehen bleiben.

§. 136. Um mit dem Leichtesten den Anfang zu machen, so betrachten wir zuerst den Ausdruck für eine Linie der ersten Ordnung. Sey der Coëfficient von A, $=a+a'v$, der Coëfficient von B, $=b+b'v$, und die Summe aller drei Coëfficienten $=e+e'v$, so ergiebt sich die Gleichung für die Linie durch Elimination von v aus den zwei Gleichungen:

$$1)\ x=\frac{a+a'v}{e+e'v},\qquad 2)\ y=\frac{b+b'v}{e+e'v}.$$

Nun findet sich für einen bestimmten Werth von x aus 1) ein bestimmter Werth von v, und für diesen aus 2) ein bestimmter Werth von y, so dass also jedem Werthe von x nur einer von y, und so auch jedem von

y nur einer von x entspricht. Man setze daher, um diesem Verhalten auf das Allgemeinste Genüge zu leisten:

$$3^*)\quad 0 = 1 + \alpha x + \beta y + \gamma xy.$$

Gebraucht man aber statt x und y zwei andere Veränderliche t und u, welche beide von der linearen Form $f + gx + hy$ sind, so sieht man leicht, dass, wegen der gleichen Nenner $(e + e'v)$ in 1) und 2), t und u durch v ausgedrückt, ebenfalls von der Form $\frac{k + lv}{e + e'v}$ seyn müssen, und mithin jedem Werthe von t nur ein Werth von u, und umgekehrt, entsprechen kann. Wenn man dagegen t und u statt x und y in 3*) einführt, so erhält man wegen des Gliedes γxy auch noch die Quadrate von t und u, und es würden hiernach auf jeden Werth von t zwei Werthe von u, und umgekehrt, kommen, welches dem Erstern widerspricht; folglich muss $\gamma = 0$ seyn. Man setze also:

$$3)\quad 0 = 1 + \alpha x + \beta y.$$

Hierin für x und y ihre Werthe aus 1) und 2) substituirt, erhält man eine Gleichung von der Form:

$$4)\quad 0 = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}v,$$

wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gegebene Functionen von $a, a', b, b', e, e', \alpha, \beta$ sind. Es muss aber diese Gleichung für jeden Werth von v bestehen; folglich muss $\mathfrak{a} = 0$ und $\mathfrak{b} = 0$ seyn. Aus diesen zwei Gleichungen lassen sich nun die Werthe der zwei noch Unbekannten α und β entwickeln; und diese in 3) substituirt, erhält man die dem gegebenen Ausdrucke entsprechende Gleichung für die Linie, die folglich auch ihrer Gleichung nach zu der ersten Ordnung gehört.

Ganz dasselbe Verfahren lässt sich mit Erfolg auch bei den Ausdrücken von der zweiten Ordnung anwenden.

Sey hier der Coëfficient von $A, = a + a'v + a''v^2$, der Coëfficient von $B, = b + b'v + b''v^2$, und die Summe aller drei Coëfficienten $= e + e'v + e''v^2$, so sind

$$1)\ x = \frac{a + a'v + a''v^2}{e + e'v + e''v^2},\quad 2)\ y = \frac{b + b'v + b''v^2}{e + e'v + e''v^2}$$

die beiden Gleichungen, aus denen durch Elimination von v die Gleichung zwischen x und y hervorgeht. Jedem Werthe von x entsprechen hiernach zwei Werthe von v, und jedem der beiden letztern, wenn er in 2) substituirt wird, ein Werth von y, also jedem Werthe von x zwei Werthe von y, und eben so jedem y zwei x. Die gesuchte Gleichung muss demnach rücksichtlich jeder der beiden Veränderlichen x und y vom zweiten Grade seyn, und würde folglich im Allgemeinen die Form haben: $o = 1 + \alpha x + \beta y + \gamma x^2 + \delta xy + \varepsilon y^2 + \zeta x^2 y + \eta xy^2 + \vartheta x^2 y^2$. Auf ähnliche Art wie vorhin zeigt sich aber auch hier, dass, wegen der gleichen Nenner $(e + e'v + e''v^2)$ in 1) und 2), alle Glieder, in denen die Summe der Exponenten von x und y grösser als 2 ist, wegfallen müssen. Man setze daher:

$$3)\quad o = 1 + \alpha x + \beta y + \gamma x^2 + \delta xy + \varepsilon y^2,$$

und substituire darin für x und y ihre Werthe aus 1) und 2); so kommt nach gehöriger Reduction eine Gleichung von der Form:

$$4)\quad o = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}v + \mathfrak{c}v^2 + \mathfrak{d}v^3 + \mathfrak{e}v^4,$$

wo $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}$ gegebene Functionen von $a, b, e, a', b', ..$ und $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sind. Da nun der Gleichung 4) jeder beliebige Werth von v Genüge leisten muss, so hat man die fünf Gleichungen: $\mathfrak{a} = o$, $\mathfrak{b} = o$, ... $\mathfrak{e} = o$, aus denen die Werthe der eben so viel Unbekannten $\alpha, \beta, .. \varepsilon$, durch $a, b, e, a', b', ..$ ausgedrückt, gefunden werden können. Und somit ist der allgemeine Ausdruck für eine Linie der

zweiten Ordnung in eine Gleichung verwandelt, die von der ebensovielten Ordnung ist.

§. 137. Nach derselben Methode wollen wir nunmehr auch die Ausdrücke höherer Ordnungen zu behandeln versuchen. — Um die dem allgemeinen Ausdrucke einer Linie von der dritten Ordnung entsprechende Gleichung zu finden, hat man aus zwei Gleichungen von der Form:

$$1) \quad x = \frac{a + a'v + a''v^2 + a'''v^3}{e + e'v + e''v^2 + e'''v^3}, \quad 2) \; y = \frac{b + b'v + b''v^2 + b'''v^3}{e + e'v + e''v^2 + e'''v^3}$$

v zu eliminiren. Mittelst ähnlicher Schlüsse wie im vorigen §. zeigt sich, dass hier zu jedem Werthe der einen der beiden Veränderlichen x und y drei Werthe der andern gehören. Dem gemäss setze man:

$$3) \quad 0 = 1 + \alpha x + \beta y + \gamma x^2 + \delta xy + \varepsilon y^2 + \zeta x^3 + \eta x^2 y + \vartheta xy^2 + \iota y^3,$$

wo wiederum wegen der gleichen Nenner in 1) und 2) alle Glieder weggelassen worden sind, in denen von den beiden Veränderlichen zwar jede für sich die dritte Potenz nicht übersteigt, aber die Summe der Exponenten grösser als 3 ist.

Hiernach wird also jedem Ausdrucke von der dritten Ordnung eine Gleichung von derselben Ordnung zugehören. Substituirt man aber in 3) für x und y ihre Werthe aus 1) und 2), so kommt eine Gleichung:

$$4) \quad 0 = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}v + \mathfrak{c}v^2 + \ldots + \mathfrak{k}v^9,$$

deren 10 Coëfficienten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{k}$ gegebene Functionen von $a, b, e, a', b', \ldots$ und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sind, und insgesammt $= 0$ seyn müssen. Dies giebt 10 Gleichungen; dagegen sind nur 9 zu bestimmende Unbekannte $\alpha, \beta, \gamma \ldots \iota$ vorhanden. Es lassen sich also die letztern nicht nur vollkommen bestimmen, sondern es bleibt nach Elimination derselben aus den 10 Gleichungen eine Gleichung zwi-

schen $a, b, e, a', b', \ldots$ selbst zurück. Diese ist aber nothwendig eine identische, keine Bedingungsgleichung. Denn wäre sie das letztere, so könnten für solche Werthe von $a, b, e, \ldots$, durch welche die Bedingung nicht erfüllt würde, auch die Gleichungen $\mathfrak{a} = o$, $\mathfrak{b} = o, \ldots$ nicht neben einander bestehen; mithin könnte auch die angenommene Form der Gleichung 3) nicht die richtige seyn, sondern müsste Glieder von noch höherer Ordnung, als der dritten, enthalten. Dies widerspricht aber erwiesenermassen der Natur der Gleichungen 1) und 2). — Allerdings ist es möglich, dass die nach dem gewöhnlichen Eliminationsprocess aus 1) und 2) sich ergebende Gleichung von einem höhern Grade als dem dritten erscheint. Alsdann kann man aber gewiss seyn, dass durch die algebraischen Umformungen ein oder mehrere ungehörige Factoren hinzugekommen sind, die man durch Division wieder absondern, und somit die Gleichung auf den dritten Grad zurückbringen kann. —

Fährt man auf dieselbe Art zu schliessen bei dem allgemeinen Ausdrucke von der vierten Ordnung fort, so kommt in den Gleichungen 1) und 2) noch die 4te Potenz von ν hinzu, die dem Ausdrucke entsprechende Gleichung 3) muss von der 4ten Ordnung seyn, erhält folglich noch die 5 Glieder $x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4$ mit ihren zu bestimmenden Coëfficienten, und die Gleichung 4) steigt dadurch bis auf den 16ten Grad. Hier giebt es also 14 zu bestimmende Coëfficienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ und dazu 17 Gleichungen: $\mathfrak{a} = o$, $\mathfrak{b} = o$, $\mathfrak{c} = o$, etc. Mithin bleiben nach Elimination der erstern aus den letztern, 3 Gleichungen zwischen $a, b, e, a'\, b', \ldots$ zurück, welche, aus demselben Grunde wie vorhin, identische seyn müssen.

Ueberhaupt sieht man, dass eine Linie, die ihrem Ausdrucke nach von der mten Ordnung ist, auch rück-

sichtlich ihrer Gleichung zu der mten Ordnung gehört. Diese Gleichung enthält im Allgemeinen $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ Glieder, also $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)-1=\frac{1}{2}m(m+3)$ zu bestimmende Coëfficienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Substituirt man hierin für x und y ihre durch v gegebenen Werthe, so gelangt man zu einer Gleichung für v, die vom m^2ten Grade ist, und deren m^2+1 Coëfficienten, sämmtlich $=0$ gesetzt, die zur Bestimmung der Coëfficienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ erforderlichen Gleichungen geben. Man hat folglich $m^2+1-\frac{1}{2}m(m+3)$ $=\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ Gleichungen mehr, als zu bestimmende Grössen; es muss daher, weil die Gleichung für die Linie unbedingt von der mten Ordnung ist, zwischen den m^2+1 Gleichungen ein solcher Zusammenhang statt finden, dass aus beliebigen $\frac{1}{2}m(m+3)$ derselben, welche von einander unabhängig sind, die übrigen $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ abgeleitet werden können. Dass dieser Uiberschuss für $m=1$ und $m=2$ verschwinde, sahen wir bereits in §. 136.

§. 138. Wenden wir uns jetzt zu der umgekehrten Aufgabe: aus der gegebenen Gleichung einer Linie den entsprechenden Ausdruck zu finden, oder was dasselbe sagen will, die Veränderlichen x und y der Gleichung als rationale Functionen einer dritten Veränderlichen v darzustellen, welche der Gleichung Genüge leisten. Schon aus Euler's *Introductio* (Tom. I. Cap. III. *De transformatione Functionum per substitutionem.*) ist bekannt, dass dieses Geschäft nur bei den Gleichungen der ersten und zweiten Ordnung immer von Statten geht, dagegen schon bei den Gleichungen der dritten Ordnung in den mehresten Fällen irrationale Formen unvermeidlich sind. Noch etwas nähern Aufschluss erhalten wir auf dem hier eingeschlagenen Wege.

Zuerst ist es gewiss, dass eine Gleichung der mten Ordnung auch zu einem Ausdrucke der mten Ordnung füh-

ren muss, wenn anders, die Gleichung in einen rationalen Ausdruck zu verwandeln, möglich ist; weil umgekehrt jedem Ausdrucke der mten Ordnung eine Gleichung der ebensovielten Ordnung entspricht. Man denke sich nun, dass nach der im vorigen §. gezeigten Methode die Werthe der Coëfficienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ durch $a, b, e, a', \ldots$ ausgedrückt, gefunden worden seyen: so hat man $\frac{1}{2}m(m+3)$ Gleichungen: $\alpha = \ldots$, $\beta = \ldots$, $\gamma = \ldots$, aus denen jetzt umgekehrt die Werthe von $a, b, e, a' \ldots$, durch $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ausgedrückt, zu entwickeln sind. Es lässt sich aber, wie in §. 69. bewiesen worden, die Anzahl der Constanten $a, b, e, a', \ldots$, unbeschadet der Allgemeinheit des Ausdrucks, auf $3m - 1$ zurückbringen, und es sind daher $\frac{1}{2}m(m+3) - 3m + 1 = \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ Gleichungen mehr, als zu bestimmende Grössen vorhanden. Da nun die Coëfficienten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ und folglich auch die ihnen zugehörigen $\frac{1}{2}m(m+3)$ Gleichungen von einander ganz unabhängig sind, so eliminire man aus letztern die $3m - 1$ zu bestimmenden Grössen, und man wird $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ Gleichungen zwischen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ bekommen, welche ebenfalls von einander unabhängig, mithin keine identischen sind, und folglich erfüllt werden müssen, wenn anders, die Gleichung für die Curve in einen rationalen Ausdruck zu verwandeln, möglich seyn soll.

Für $m = 1, 2, 3, 4, 5$, etc. erhält $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ die resp. Werthe 0, 0, 1, 3, 6, etc. Ist also die Gleichung zwischen x und y nur von der ersten oder zweiten Ordnung, so lässt sich ohne weitere Bedingung ein ihr entsprechender rationaler Ausdruck finden. Dagegen muss bei einer Gleichung der dritten Ordnung eine gewisse Bedingungsgleichung zwischen ihren Coëfficienten erfüllt werden, wenn x und y sich als rationale Functionen einer dritten Veränderlichen sollen ausdrücken lassen. Bei einer Gleichung der 4ten Ordnung müssen zu demselben Zwecke 3 Bedingungsgleichungen erfüllt werden, u. s. w. Diese Bedingungsgleichungen selbst aber zu entwickeln, möchte eine sehr weitläufige Rechnung erfordern.

Zweiter Abschnitt.

Von den Verwandtschaften der Figuren und den daraus entspringenden Classen geometrischer Aufgaben.

Erstes Capitel.

Von der Gleichheit und Aehnlichkeit.

§. 139. Wenn in zwei Figuren jedem Punkte der einen Figur ein Punkt der andern entspricht, dergestalt, dass der gegenseitige Abstand je zweier Punkte der einen Figur dem gegenseitigen Abstande der entsprechenden Punkte in der andern Figur gleich ist, so sind die Figuren einander gleich und ähnlich. Diese Erklärung der Gleichheit und Aehnlichkeit, — denn als solche kann man den voranstehenden Satz betrachten, — ist allgemein anwendbar, mögen die Figuren bloss aus isolirten Punkten, oder aus Linien, oder aus Flächen bestehen, mögen im erstern Falle die Punkte in einer geraden Linie, oder in einer Ebene, oder im Raume überhaupt liegen.

Die einfachsten Figuren, welche einander gleich und ähnlich seyn können, sind demnach Systeme, jedes aus zwei Punkten bestehend. Heissen A und B die zwei Punkte des einen Systems, A' und B' die ihnen entsprechenden, welche das andere System ausmachen, so sind, der Erklärung zufolge, die beiden Systeme einander gleich und ähnlich, wenn B' von A' eben so weit, als B von A absteht, oder in Zeichen: wenn $A'B' = AB$ ist. — Kommt zu dem Systeme A, B ein dritter Punkt C hinzu, gleichviel ob dieser mit A und B in einer Geraden, oder nicht, liegt, so ist C' der entsprechende Punkt

in dem andern Systeme A', B', wenn $C'A' = CA$ und $C'B' = CB$. — Wird dem Systeme A, B, C ein vierter Punkt D hinzugefügt, mag dieser mit A, B, C in einer Ebene, oder ausserhalb derselben enthalten seyn, so hat man D' als entsprechenden Punkt in dem andern Systeme A', B', C', wenn noch $D'A' = DA$, $D'B' = DB$, $D'C' = DC$; u. s. w.

§. 140. **Aufgabe.** Ein System von n Punkten zu construiren, welches einem andern gegebenen Systeme von n Punkten gleich und ähnlich ist.

Auflösung. Heissen die Punkte des gegebenen Systems: $A, B, C, D, \ldots$, und die ihnen resp. entsprechenden in dem zu construirenden: $A', B', C', D', \ldots$. Nun hat man drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die erstern Punkte entweder in einer Geraden, oder in einer Ebene, oder im Raume überhaupt liegen.

Im ersten Falle nehme man A' wiederum in einer Geraden und trage darein $A'B' = AB$, gleichviel auf welche Seite von A'. Man trage ferner in diese Gerade $A'C' = AC$, so dass C' mit B' auf einerlei oder verschiedenen Seiten von A' liegt, je nachdem C mit B auf einerlei oder verschiedenen Seiten von A befindlich ist. Eben so wie bei C verfahre man mit der Bestimmung aller übrigen Punkte. — Hiernach ist also A' ganz willkührlich zu nehmen, jeder der übrigen $n-1$ Punkte aber wird durch einen Abstand bestimmt, und es werden folglich zur Construction des ganzen Systems nicht mehr und nicht weniger als $n-1$ Abstände als gegeben erfordert.

Wenn zweitens $A, B, C, \ldots$ in einer Ebene liegen, so liegen auch $A', B', C', \ldots$ in einer Ebene. Der Ort von A' bleibt darin der Willkühr überlassen; B' ist ein beliebiger Punkt des Kreises, der aus A' als Mittelpunkt

mit AB als Halbmesser beschrieben wird; C' ist einer der beiden Durchschnitte der zwei Kreise, welche aus A' mit AC und aus B' mit BC beschrieben werden. Um einen der übrigen Punkte, z. B. D' zu finden, beschreibe man aus A' mit AD und aus B' mit BD Kreise und nehme für D' denjenigen ihrer beiden Durchschnitte, welcher mit C' auf einerlei oder verschiedene Seiten von $A'B'$ fällt, je nachdem D und C auf derselben oder verschiedenen Seiten von AB liegen. — Hier sind also zur Bestimmung von A' gar keiner, zur Bestimmung von B' einer, und zur Bestimmung jedes der übrigen $n-2$ Punkte zwei Abstände, also in Allem nicht mehr und nicht weniger, als $1+2(n-2)=2n-3$ Abstände erforderlich.

Ist endlich das gegebene System im Raume enthalten, so ist A' ganz willkührlich; B' ein beliebiger Punkt der Kugelfläche, welche A' zum Mittelpunkte und AB zum Halbmesser hat; C' ein beliebiger Punkt des Kreises, in welchem sich die zwei aus A' mit AC und aus B' mit BC beschriebenen Kugelflächen schneiden; D' einer von den zwei Punkten, in denen sich die drei Kugelflächen, aus A' mit AD, aus B' mit BD und aus C' mit CD als Halbmessern beschrieben, schneiden. Auf eben die Art wie D' wird dann auch jeder der übrigen Punkte, z. B. E', gefunden, nur dass von den zwei gemeinschaftlichen Durchschnitten der aus A', B', C' mit AE, BE, CE beschriebenen Kugelflächen derjenige zu nehmen ist, welcher mit D' auf einerlei oder verschiedenen Seiten der Ebene $A'B'C'$ liegt, je nachdem das eine oder das andere bei den entsprechenden Punkten in dem gegebenen Systeme der Fall ist. — Zur Bestimmung von A' wird also kein Abstand, zur Bestimmung von B' einer, zur Bestimmung von C' werden zwei, und zur

Bestimmung jedes der übrigen $n-3$ Punkte drei Abstände erfordert, folglich in Allem $1+2+3(n-3)=3n-6$ Abstände.

Anmerkung. Nur also noch bei dem Punkte D' und bei keinem der folgenden steht es frei, zwischen den zwei auf verschiedene Seiten der Ebene $A'B'C'$ fallenden Durchschnitten der drei Kugelflächen zu wählen. Es unterscheiden sich diese beiden Durchschnitte dadurch von einander, dass, von dem einen aus gesehen, die Folge der Punkte $A'B'C'$ von der Rechten nach der Linken, von dem andern aus aber, von der Linken nach der Rechten geht, oder, wie man sich auch ausdrücken könnte, dass der erstere Punkt auf der linken, der letztere auf der rechten Seite der Ebene $A'B'C'$ liegt. Je nachdem man nun für D' den einen oder den andern dieser zwei Punkte wählt, je nachdem wird die gedachte Folge entweder übereinstimmend oder verschieden von derjenigen seyn, in welcher von D aus die Punkte A, B, C erscheinen. In beiden Fällen sind sich die Systeme $A, B, C, D, \ldots$ und $A', B', C', D', \ldots$ zwar gleich und ähnlich, können aber nur im ersten Falle zur Coincidenz gebracht werden.

— Es scheint sonderbar, dass bei körperlichen Figuren Gleichheit und Aehnlichkeit ohne Coincidenz statt finden kann, da hingegen bei Figuren in Ebenen oder bei Systemen von Punkten in geraden Linien Gleichheit und Aehnlichkeit mit Coincidenz immer verbunden ist. Der Grund davon möchte darin zu suchen seyn, dass es über den körperlichen Raum von drei Dimensionen hinaus keinen andern, keinen von vier Dimensionen giebt. Gäbe es keinen körperlichen Raum, sondern wären alle räumlichen Verhältnisse in einer einzigen Ebene enthalten, so würde es eben so wenig möglich seyn, zwei sich gleiche und ähnliche Dreiecke, bei denen aber die Folge der sich entsprechenden Spitzen nach entgegengesetztem Sinne geht, zur Deckung zu bringen. Nur dadurch kann man diese bewerkstelligen, dass man das eine Dreieck um eine seiner Seiten oder um irgend eine andere Gerade der Ebene, als um eine Axe, eine halbe Umdrehung machen lässt, bis es wieder in die Ebene fällt. Dann geht bei ihm und dem andern Dreiecke die Folge der sich entsprechenden Spitzen nach einerlei Sinn, und es kann mit dem andern durch Fortbewegung in der Ebene selbst, ohne weitere Zuhülfenahme des körperlichen Raums coincidirend gemacht werden.

Eben so verhält es sich mit zwei gleichen Systemen von Punkten in einer und derselben geraden Linie: $A, B, \ldots$ und $A', B', \ldots$. Sind sich bei diesen die Richtungen AB und $A'B'$ entgegengesetzt, so wird durch blosses Fortbewegen des einen Systems in der ge-

raden Linie selbst auf keine Weise eine Deckung der sich entsprechenden Punkte hervorgebracht, sondern erst nach einer halben Umdrehung des einen Systems in irgend einer durch die Gerade gehenden Ebene.

Zur Coincidenz zweier sich gleichen und ähnlichen Systeme im Raume von drei Dimensionen: $A, B, C, D, \ldots$, und $A', B', C', D', \ldots$, bei denen aber die Punkte $D, E, \ldots$ und $D', E', \ldots$ auf ungleichnamigen Seiten der Ebenen ABC und $A'B'C'$ liegen, würde also, der Analogie nach zu schliessen, erforderlich seyn, dass man das eine System in einem Raume von vier Dimensionen eine halbe Umdrehung machen lassen könnte. Da aber ein solcher Raum nicht gedacht werden kann, so ist auch die Coincidenz in diesem Falle unmöglich.

§. 141. Zusätze. *a*. Bei einem Systeme von n Punkten ist die Anzahl aller Abstände je zweier Punkte von einander $= \frac{1}{2}n(n-1)$. Von diesen Abständen wurden, je nachdem die Punkte in einer Geraden, Ebene, oder im Raume lagen, nur $n-1$, $2n-3$, oder $3n-6$ in beiden Systemen einander gleich gemacht. Dass nun dann immer, wie es die Erklärung der Gleichheit und Aehnlichkeit erfordert, auch die übrigen

$$\tfrac{1}{2}n(n-1) - n + 1 = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$
$$\tfrac{1}{2}n(n-1) - 2n + 3 = \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)$$
$$\tfrac{1}{2}n(n-1) - 3n + 6 = \tfrac{1}{2}(n-3)(n-4)$$

Abstände des einen Systems den eben so viel entsprechenden Abständen des andern Systems gleich sind, muss in jedem der drei Fälle besonders bewiesen werden.

Der Beweis für den ersten Fall, wo die Punkte in einer Geraden liegen, fliesst unmittelbar aus der Deckung gerader Linien von gleicher Länge.

Den zweiten Fall anlangend, so haben vermöge der Construction die Dreiecke $A'B'C'$, $A'B'D'$, $A'B'E'$, etc. resp. mit den Dreiecken ABC, ABD, etc. gleiche Seiten und decken sich folglich der Reihe nach; mithin können auch die ganzen Figuren $ABCD..$ und $A'B'C'D'..$ zur Deckung gebracht werden.

Der Beweis für den dritten Fall wird, wenn die Punkte $D, E, \ldots$ und $D', E', \ldots$ auf gleichnamigen Seiten der Dreiecksebenen ABC und $A'B'C'$ liegen, ähnlicherweise mittelst des Satzes geführt, dass zwei Pyramiden $ABCD$ und $A'B'C'D'$ in einander passen, wenn die sechs Kanten der einen den sechs Kanten der andern der Reihe nach gleich sind, und D' auf derselben Seite von $A'B'C'$ sich befindet, auf welcher D von ABC liegt *). — Bei ungleichartiger Lage macht der Beweis mehrere Vorbereitungen nöthig, auf die ich mich aber hier nicht einlassen kann, sondern auf Legendre *Géométrie*, Livre VI. Prop. 2. und Note VII. verweise.

b. Wenn nicht, wie in der Aufgabe vorausgesetzt wurde, das ganze System von n Punkten gegeben ist, sondern bloss die $n-1$ oder $2n-3$, oder $3n-6$ Abstände in demselben, die zur Construction eines ihm gleichen und ähnlichen Systems erforderlich waren, so

*) Dieser Satz lässt sich folgendergestalt leicht darthun. — Weil $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $C'A' = CA$, so können die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ immer zur Deckung gebracht werden. Der gemachten Annahme zufolge liegen alsdann D und D' auf einerlei Seite von ABC. Fielen nun D und D' nicht zusammen, so entstünden, wegen $AD = A'D'$, etc., die gleichschenklichen Dreiecke ADD', BDD', CDD' mit der gemeinschaftlichen Basis DD'. Heisse daher M der Mittelpunkt von DD', so wären AM, BM, CM auf DD' perpendikular, mithin A, B, C, M in einer Ebene befindlich, von welcher DD' rechtwinklich halbirt würde. Mithin lägen D und D' auf verschiedenen Seiten von ABC, welches gegen die Annahme ist. Es fallen daher D und D' zusammen, folglich auch AD und $A'D'$, etc. und die ganzen Pyramiden passen in einander.
Liegen D und D' auf ungleichnamigen Seiten von ABC und $A'B'C'$, so folgt nach denselben Schlüssen, dass bei Deckung der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Gerade DD' von der Ebene ABC rechtwinklich halbirt wird. — Dies hier zur Folge erhaltene Resultat ist bei Legendre (Livre VI. Définit. 16.) die Erklärung von dergleichen Körpern, *polyèdres symmétriques* von ihm genannt.

wie auch die Seiten, auf denen die übrigen Punkte von dem Punkte *A* oder von der Geraden *AB* oder von der Ebene *ABC* liegen, so lassen sich daraus, eben vermöge der gelehrten Construction, die übrigen Abstände und alle andern dabei vorkommenden Grössen finden.

Und überhaupt:

Hat man ein System von n Punkten in einer Geraden, oder in einer Ebene, oder im Raume, und sind von den Grössen, welche dadurch auf irgenderlei Weise bestimmt werden können, resp. $n-1$, $2n-3$, $3n-6$ von einander unabhängige gegeben, so kann man daraus alle übrigen finden.

Zweites Capitel.

Von der Aehnlichkeit.

§. 142. Die einfachste und engste Art von Verwandtschaft, die zwischen Figuren statt haben kann, ist die Gleichheit und Aehnlichkeit, indem von zwei solchen Figuren die eine nichts anders, als eine vollkommene Wiederholung, ein nochmaliges Setzen der andern ist. Weniger einfach und von grösserer Ausdehnung ist die blosse Aehnlichkeit. Hier kann man die eine Figur als eine Wiederholung der andern nach einem grössern oder kleinern Maſsstabe betrachten, oder bestimmter: Zwei Figuren sind einander ähnlich, wenn die gegenseitigen Abstände je zweier Punkte der einen Figur in denselben Verhältnissen zu einander stehen, als wie die Abstände der entsprechenden Punkte in der andern.

Die einfachsten Figuren, bei denen von Aehnlichkeit noch die Rede seyn kann, sind daher Systeme, jedes

von drei Punkten gebildet. Das System A', B', C' ist dem Systeme A, B, C ähnlich, wenn $A'B' : B'C' : C'A' = AB : BC : CA$, oder, was dasselbe ist, wenn $A'B' = m.AB$, $B'C' = m.BC$, $C'A' = m.CA$ ist, wo m eine beliebige Zahl bezeichnet. Sollen die Systeme A, B, C, D und A', B', C', D' einander ähnlich seyn, so wird erfordert, dass noch $A'D' = m.AD$, $B'D' = m.BD$, $C'D' = m.CD$; u. s. w.

§. 143. **Zusätze und Folgerungen.** *a.* Dass dieser Definition gemäss ähnliche Figuren auch wirklich existiren, ist hieraus im Allgemeinen noch nicht abzunehmen, sondern bedarf eines Beweises. Der Elementargeometrie liegt es ob, denselben zu führen. Diesen Beweis aber vorausgesetzt, sieht man ohne weiteres, dass man zur Construction eines Systems $A', B', C', ..$, welches einem gegebenen Systeme $A, B, C, ..$ ähnlich ist, folgendergestalt verfahren kann. — Man nehme A' und B' ganz willkührlich, denke sich hierauf, $A'B' = m.AB$ gesetzt, ein dem gegebenen Systeme ähnliches System, in welchem jeder Abstand dem mfachen des entsprechenden Abstandes in dem gegebenen gleich ist, als schon vorhanden, und bestimme nun die übrigen Punkte $C', D', ..$, indem man auf die in §. 140. gezeigte Weise ein diesem eingebildeten Systeme gleiches und ähnliches construirt.

b. Statt der in §. 140. zur Construction angewendeten Abstände $AB, AC, BC, ...$ werden also gegenwärtig die Längen $m.AB$, $m.AC$, $m.BC, ...$ genommen, wo m eine beliebige Zahl ist. Zur Construction eines ähnlichen Systems braucht man folglich nur die Verhältnisse zu kennen, in welchen von den zur Construction eines gleichen und ähnlichen Systems erforderlichen Abständen irgend einer zu den übrigen steht. Da nun die Anzahl dieser Verhältnisse immer um Eins geringer ist, als die der Abstände selbst, so werden, je nachdem die Punkte

des gegebenen Systems in einer Geraden, in einer Ebene oder im Raume liegen, $n-2$, $2n-4$ oder $3n-7$ Verhältnisse erfordert.

c. Ist das System nicht selbst gegeben, sondern bloss die Verhältnisse, welche zur Construction eines ähnlichen Systems zu wissen nöthig sind, so kann man mit Hülfe der Construction alle übrigen Verhältnisse je zweier Abstände und alle andern Grössen finden, welche ähnliche Figuren mit einander gemein haben, als Winkel, Verhältnisse von Flächen, u. s. w. Wir schliessen hieraus, eben so wie in §. 141. *b.*:

Sind von einem Systeme von n Punkten in einer Geraden, in einer Ebene, oder im Raume resp. irgend $n-2$, $2n-4$, $3n-7$ von einander unabhängige Verhältnisse zwischen den gegenseitigen Abständen der Punkte, oder eben so viel andere von diesen Verhältnissen abhängige Grössen oder Bedingungen gegeben, so lassen sich daraus alle übrigen Verhältnisse zwischen den Abständen und davon abhängigen Grössen finden.

d. Verhältnisse lassen sich immer durch Zahlen ausdrücken. Hier werden also aus gegebenen Zahlen andere durch Construction gefunden. Letztere Zahlen müssen sich daher aus erstern auch durch Rechnung finden lassen. Es müssen folglich von den gegebenen $n-2, \ldots$ Verhältnissen des Systems alle übrigen Verhältnisse als analytische Functionen darstellbar seyn.

Es fliesst hieraus noch, dass die in §. 141. *b.* als lösbar erwiesene Forderung, nicht allein durch Construction, sondern gleichfalls auch durch Rechnung gelöst werden kann. Denn aus den dort gegebenen $n-1, \ldots$ Stücken, die wir jetzt in Zahlen ausgedrückt annehmen, ist es

immer möglich, $n-2, \ldots$ von einander unabhängige Verhältnisse zu bilden. Aus diesen aber können, dem eben Gesagten zufolge, durch Rechnung alle übrigen Verhältnisse des Systems, also auch die Verhältnisse der übrigen Stücke zu den gegebenen, also auch die übrigen Stücke selbst in Zahlen gefunden werden.

Anmerkung. Aus der Möglichkeit, eine geometrische Aufgabe durch Construction zu lösen, kann man, ohne die Lehre von der Aehnlichkeit als erwiesen vorauszusetzen, die Möglichkeit einer Auflösung durch Rechnung noch nicht folgern.

Heissen z. B. a, b, c, d die vier Seiten eines Vierecks; e, f die zwei Diagonalen desselben. Sey ferner r irgend eine zur Einheit angenommene Länge, und $a, b, \ldots f$, in solchen Einheiten ausgedrückt, $= \alpha, \beta, \ldots \zeta$, so dass $a = \alpha r$, $b = \beta r$, etc. Nun kann man durch eine sehr einfache Construction aus den Linien a, b, c, d, e die Linie f, folglich auch aus der Linie r und den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ die Zahl ζ finden. Ob aber aus $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ allein die Zahl ζ gefunden werden könne, ob also ζ ungeändert bleibe, wie gross oder klein auch r genommen werde, ist hiermit noch nicht entschieden.

Allerdings müsste zwar, wenn zur Bestimmung von ζ nächst $\alpha, \ldots \varepsilon$ auch r erforderlich wäre, auch umgekehrt r aus $\alpha, \ldots \zeta$ gefunden werden können, da doch eine Function von Zahlen immer wieder eine Zahl und keine ausgedehnte Grösse seyn kann. Allein wenn Legendre eine dergleichen Schlussart anwendet, um die Lehre von der Aehnlichkeit analytisch zu begründen (*Elém. de Géom.* note 2.), so kann wohl mit Recht entgegengesetzt werden, dass, obschon r durchaus nicht eine analytische Function von $\alpha, \ldots \zeta$ seyn kann, es doch keineswegs undenkbar ist, dass r aus $\alpha, \ldots \zeta$ auf geometrischem Wege gefunden werden könne; dass folglich Leg. noch immer zuvor beweisen muss, dass dasjenige, was durch Construction bestimmt werden kann, auch durch Rechnung sich herleiten lasse. Denn hieraus erst kann gefolgert werden, dass dasjenige, was sich durch Rechnung nicht finden lässt, auch nicht durch Construction bestimmbar ist. Es wird folglich von Leg. ein Kreis im Schliessen begangen, da eben erst aus der zu beweisenden Lehre von der Aehnlichkeit die Möglichkeit einer Anwendung der Analysis auf die Geometrie hervorgeht.

Drittes Capitel.

Von der Affinität.

§. 144. Ausser der Gleichheit und Aehnlichkeit und der Aehnlichkeit allein giebt es noch einige andere Arten von Verwandtschaften, die gleichfalls in das Gebiet der Elementargeometrie gehören. Die barycentrische Bestimmungs-Methode von Punkten wird uns zur Erkenntniss dieser Verwandtschaften und der sehr merkwürdigen aus ihnen zu ziehenden Folgerungen hinführen.

Man denke sich ein System von Punkten $A, B, C, D \ldots$ in einer Ebene. Drei derselben, A, B, C, nehme man zu F.punkten und bestimme in Bezug auf dieselben jeden der übrigen durch einen Ausdruck von der Form: $aA + bB + cC$. Wenn nun die drei Seiten des Dreiecks ABC und für jeden der übrigen Punkte die Verhältnisse der Coëfficienten im Ausdrucke desselben, $a:b:c$, gegeben sind, so ist klar, dass alle mit Hülfe jener Seiten und dieser Verhältnisse construirten Figuren einander unter sich und der erstern gleich und ähnlich seyn werden. Eben so leuchtet ein, dass, wenn statt der Seiten des F.dreiecks selbst, bloss die gegenseitigen Verhältnisse derselben gegeben sind, zwischen den construirten Figuren und der ursprünglichen nur Aehnlichkeit obwalten wird. Gesetzt aber, dass von dem F.dreiecke gar nichts, und bloss die Verhältnisse der Coëfficienten für die übrigen Punkte gegeben sind, so werden die somit

hervorgehenden Figuren, weil nun die drei F.punkte ganz nach Willkühr genommen werden können, in einer noch entferntern Beziehung zu einander stehen.

§. 145. Um das Wesen dieser Beziehung ausfindig zu machen, so seyen A', B', C' (Fig. 29.) drei beliebige Punkte, die man den Punkten A, B, C resp. entsprechend setze. Ist nun irgend einer der übrigen Punkte in der ersten Figur, $D \equiv aA + bB + cC$, so wird D' der entsprechende Punkt in der zweiten seyn, wenn $D' \equiv aA' + bB' + cC'$, d. h. wenn die Dreiecksflächen zwischen A', B', C', D' sich eben so zu einander verhalten, als wie die ihnen entsprechenden zwischen A, B, C, D (§. 24. *c.*). Man ziehe demnach die Gerade CD, welche AB in Z schneide, theile $A'B'$ in Z' dergestalt, dass $A'B' : B'Z' = AB : BZ$, ziehe $C'Z'$ und nehme darin D', so dass $C'D' : Z'D' = CD : ZD$, so ist D' gefunden.

Unmittelbar also folgt aus einer solchen Construction nur dieses, dass, $A'B'C' = m.ABC$ gesetzt, auch jedes andere Dreieck der zweiten Figur, welches mit dem Dreiecke $A'B'C'$ eine Seite gemein hat, dem mfachen des entsprechenden Dreiecks in der ersten Figur gleich ist; z. B. dass $B'C'D' = m.BCD$. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass dieselbe Relation auch zwischen je zwei andern sich entsprechenden Dreiecken statt finden muss; z. B. dass $D'E'F' = m.DEF$.

Denn seyen P, Q, R, S irgend vier Punkte der ersten Figur, und, durch ihre Ausdrücke auf A, B, C bezogen, bestimmt. Man eliminire aus diesen vier Ausdrücken, als Gleichungen behandelt, die drei F.punkte, und man erhält eine Gleichung zwischen den vier Punkten selbst: $\pi P + \varkappa Q + \varrho R + \sigma S = 0$, deren Coëfficienten $\pi, \varkappa, \varrho, \sigma$ aus den Coëfficienten der ersten vier Gleichungen zusammengesetzt, also ebenfalls gegeben sind. Heissen nun die

diesen Punkten in der andern Figur entsprechenden Punkte P', Q', R', S', so dass, wenn $P \equiv pA + qB + rC$, auch $P' \equiv pA' + qB' + rC'$ ist, u. s. w.: so muss zwischen den letztern vier Punkten eine Gleichung mit denselben Coëfficienten statt finden, wie zwischen den vier erstern: $\pi P' + \varkappa Q' + \varrho R' + \sigma S' = 0$. Mithin stehen die Dreiecksflächen zwischen P', Q', R', S' in denselben Verhältnissen zu einander, wie die entsprechenden zwischen P, Q, R, S. — Wenden wir dieses auf die Systeme B, C, D, E und B', C', D', E' an, so muss, weil $B'C'D' = m.BCD$ war, auch $C'D'E' = m.CDE$ seyn; und eben so folgt aus letzterer Gleichung in Bezug auf die Systeme C, D, E, F und C', D', E', F': $D'E'F' = m.DEF$. Ueberhaupt also stehen die Dreiecksflächen der einen Figur in denselben Verhältnissen zu einander, wie die entsprechenden der andern. Da endlich jede ebene Figur durch Ziehung von Diagonalen als ein Aggregat von Dreiecken betrachtet werden kann, so lässt sich das Wesen der in Rede stehenden Verwandtschaft bei ebenen Figuren noch allgemeiner als darin bestehend angeben: dass je zwei Flächentheile der einen Figur sich eben so zu einander verhalten, wie die entsprechenden Flächentheile der andern.

§. 146. Eine andere Ansicht, unter welcher man diese entferntere Verwandtschaft auffassen kann, ist folgende. Seyen wiederum A, B, C, P und A', B', C', P' sich entsprechende Punkte in beiden Figuren, also $P' \equiv pA' + qB' + rC'$, wenn $P \equiv pA + qB + rC$ ist. Man betrachte nun die Linien CA und CB als die Axen eines Systems paralleler Coordinaten, CA als die Axe X, CB als die Axe Y, so ist für den Punkt P (§. 123. *b.*):

$$x = \frac{p}{p+q+r} . CA, \quad y = \frac{q}{p+q+r} . CB.$$

Eben so nehme man in der andern Figur $C'A'$ und $C'B'$

zu den Axen eines Coordinatensystems, und nenne die Coordinaten von P' auf diese Axen bezogen, x' und y', so ist:

$$x' = \frac{p}{p+q+r} C'A', \quad y' = \frac{q}{p+q+r} C'B',$$

folglich

$$x' = \frac{C'A'}{CA} x, \quad y' = \frac{C'B'}{CB} y.$$

Bezieht man demnach die Punkte einer ebenen Figur durch Coordinaten auf zwei, sich unter einem beliebigen Winkel (ACB) schneidende, Axen, und construirt nun eine zweite Figur unter einem von dem vorigen verschiedenen Axenwinkel ($A'C'B'$) dergestalt, dass jede Abscisse in der zweiten zu der ihr entsprechenden in der ersten in einem beliebigen constanten Verhältnisse ($C'A' : CA$) steht, und dass eben so das gegenseitige Verhältniss der sich entsprechenden Ordinaten ein beliebiges constantes, aber von dem der Abscissen verschiedenes Verhältniss ($C'B' : CB$) ist, so wird ebenfalls zwischen beiden Figuren die neue allgemeinere Verwandtschaft statt finden. — Mit andern Worten: Man beziehe eine ebene Figur auf zwei beliebige Axen, messe die Abscissen mit einer willkührlichen zur Einheit angenommenen Länge, und eben so die Ordinaten mit einem beliebigen andern Längenmaſs. Lässt man nun die durch diese Messungen für jeden Punkt der Figur resultirenden zwei Zahlen gegeben seyn, nicht aber den Axenwinkel und die beiden Längenmaſse, sondern bleiben diese der Willkühr überlassen, so werden alle mit jenen Zahlen construirten Figuren unter sich und mit der ursprünglichen in der gedachten Verwandtschaft stehen. Vergl. §. 127.

§. 147. Von einer solchen gegenseitigen Beziehung der Figuren hat schon Euler gehandelt. *Introd. in*

Anal. Inf. Tom. II. Cap. XVIII. *De Similitudine et Affinitate Linearum curvarum.* — „Quemadmodum," heisst es daselbst in articl. 442., „in Curvis similibus Abscissae et Applicatae homologae in eadem ratione sive augentur sive diminuuntur; ita, si Abscissae aliam sequantur rationem, aliam vero Applicatae, Curvae non amplius orientur similes. Verum tamen, quia Curvae hoc modo ortae inter se quandam Affinitatem tenent, has Curvas affines vocabimus: complectitur ergo Affinitas sub se similitudinem tanquam speciem: quippe Curvae affines in similes abeunt, si ambae illae rationes, quas Abscissae et Applicatae seorsim sequuntur, evadant aequales." — Der von Euler hier aufgestellte Begriff der Affinitas ist also ganz mit dem vorhin entwickelten einerlei, und ich will daher gleichfalls diese allgemeinere Verwandtschaft Affinität, und Figuren, zwischen denen sie statt findet, affine Figuren nennen.

Indess scheint Euler diesen Begriff nicht weiter verfolgt zu haben; sonst würde er nicht zwischen ähnlichen und affinen Curven den, wie ich gleich zeigen werde, unrichtigen Hauptunterschied, articl. 444., finden: „quod Curvae, quae sunt similes respectu unius Axis vel puncti fixi, eaedem similes sint futurae respectu aliorum quorumvis Axium seu punctorum homologorum. Curvae autem, quae tantum sunt affines, tales tantum sunt respectu eorum Axium, ad quos referuntur, neque pro lubitu alii Axes, seu puncta homologa, in ipsis dantur, ad quae affinitas referri possit."

Die Unrichtigkeit dieser Behauptung, dass die Affinität immer nur hinsichtlich eines einzigen Axensystems statt finde, erhellet sogleich daraus, dass jede drei Punkte der Ebene, in welcher die Figur enthalten ist, zu den F.punkten genommen werden können. Die Be-

hauptung lässt sich aber sehr leicht auch ohne barycentrische Hülfsmittel, durch ganz einfache auf den ersten Elementen beruhende Betrachtungen widerlegen; und ich achte, dieses zu thun, um so weniger für überflüssig, da es nicht einen speciellen Satz, sondern eine wichtige Ansicht der Figuren überhaupt betrifft.

§. 148. Seyen $P, Q, R, \ldots$ mehrere Punkte in einer Ebene, und ihre Coordinaten, auf ein gewisses Axensystem bezogen, $= t, u;\ t', u';\ t'', u'';\ldots;$ so werden, nach Euler's Erklärung, die Punkte $P', Q' R', \ldots$ ein affines System bilden, wenn sie gleichfalls in einer Ebene enthalten, und ihre Coordinaten in Bezug auf ein gewisses Axensystem in derselben resp. $mt, nu;\ mt', nu';\ mt'', nu'';$ $\ldots$ sind. Ueberhaupt wird hiernach jedem beliebigen Punkte in der ersten Ebene ein gewisser in der zweiten entsprechen, den man findet, wenn man seine Abscisse dem mfachen und seine Ordinate dem nfachen der Abscisse und Ordinate des erstern gleich macht. Eben so wird es für jede beliebig gezogene gerade oder krumme Linie in der einen Ebene eine entsprechende Linie in der andern, also eine affine, geben, die man erhält, wenn man die Punkte der andern Ebene, welche den Punkten der Linie in der erstern entsprechen, wiederum durch eine Linie verbindet.

Gesetzt nun, es liegen die Punkte P, Q, R in einer Geraden, so verhalten sich $PQ : QR = t' - t : t'' - t'$ $= u' - u : u'' - u'$, folglich auch $= mt' - mt : mt'' - mt'$ $= nu' - nu : nu'' - nu'$; mithin liegen auch P', Q', R' in einer Geraden, und es verhält sich $PQ : QR$ $= P'Q' : Q'R'$.

Von allen Punkten der einen Ebene, welche in einer Geraden liegen, sind also die entsprechenden Punkte der andern wiederum in einer Geraden enthalten; beide

Geraden sind sich entsprechende Linien und werden durch die sich entsprechenden Punkte nach einerlei Verhältnissen getheilt.

Der Durchschnitt zweier Geraden in der einen Ebene und der Durchschnitt der ihnen entsprechenden Geraden in der andern müssen daher ebenfalls sich entsprechende Punkte seyn.

Heissen t, u die Coordinaten des erstern Durchschnitts, so sind mt, nu die Coordinaten des letztern. Laufen nun die erstern Geraden mit einander parallel, sind also t, u als unendlich gross zu betrachten, so sind es auch mt, nu, und folglich auch die letztern Geraden mit einander parallel.

Parallellinien in der einen Ebene entsprechen daher Parallellinien in der andern. Auch folgt hieraus leicht in Verbindung mit dem Vorigen, dass zwei Gerade (b, b'), welche durch zwei sich entsprechende Punkte (A, A') parallel mit zwei sich entsprechenden Geraden (a, a') gezogen werden (b durch A und parallel mit a; b' durch A' und parallel mit a'), sich gleichfalls entsprechen.

Dieses vorausgeschickt, seyen a, b zwei beliebige Gerade in der ersten Ebene, welche sich in $\mathfrak{C}$ schneiden, und a', b' die ihnen entsprechenden Geraden in der zweiten Ebene, welche sich in dem dem $\mathfrak{C}$ entsprechenden Punkte $\mathfrak{C}'$ schneiden werden. Ich behaupte nun, dass sich die beiden Systeme $P, Q, R, \ldots$; $P', Q', R', \ldots$ auch rücksichtlich dieser zwei Paare von Geraden, als Axen betrachtet, affin sind. Um dieses zu beweisen, lege ich durch $P, Q, R, \ldots$ Parallelen mit b, und durch $P', Q', R', \ldots$ Parallelen mit b', so entsprechen die erstern Parallelen den letztern, folglich auch die Durchschnitte der erstern mit a, welche $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \ldots$ heissen, den Durchschnitten der letztern mit a', welche ich $\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}', \mathfrak{R}', \ldots$

nennen will. Mithin sind $\mathfrak{S}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \ldots$ und $\mathfrak{S}', \mathfrak{P}', \mathfrak{Q}', \mathfrak{R}', \ldots$, zwei Reihen sich entsprechender Punkte, welche in sich entsprechenden Geraden a und a' liegen, und folglich $\mathfrak{SP} : \mathfrak{SQ} : \mathfrak{SR} : \ldots = \mathfrak{S'P'} : \mathfrak{S'Q'} : \mathfrak{S'R'} : \ldots$, d. h., wenn wir a und a' zu den Abscissenlinien nehmen: die neuen Abscissen in dem einen Systeme verhalten sich eben so, wie die neuen Abscissen in dem andern. Da nun dasselbe auch von den neuen in b und b' liegenden Ordinaten bewiesen werden kann, so sind sich die beiden Systeme auch rücksichtlich der neuen Axenpaare affin.

§. 149. **Zusätze.** *a.* Heissen die Axenwinkel der zwei vorhin gedachten ursprünglichen Coordinatensysteme, φ und ψ, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks

$$PQR = \tfrac{1}{2} \sin\varphi \,[t(u'' - u') + t'(u - u'') + t''(u' - u)]$$

und der Flächeninhalt des Dreiecks

$$P'Q'R' = \tfrac{1}{2} \sin\psi \,.\, mn\,[t(u'' - u') + \ldots],$$

also $$PQR : P'Q'R' = \sin\varphi : mn \sin\psi,$$

woraus wiederum der obige Satz (§. 145.) folgt, dass je zwei sich entsprechende Dreiecke in einem constanten Verhältnisse stehen.

b. Auch aus diesem Satze können die im vorigen §. angeführten Eigenschaften affiner Figuren sehr leicht abgeleitet werden. Liegen z. B. P, Q, R in einer Geraden, so ist das Dreieck $PQR = 0$, folglich auch $P'Q'R' = 0$, mithin liegen auch P', Q', R' in einer Geraden. Sind noch S und S' zwei sich entsprechende, aber ausserhalb jenen Geraden gelegene Punkte, so verhalten sich $PQS : QRS = PQ : QR$, und $P'Q'S' : Q'R'S' = P'Q' : Q'R'$, folglich $PQ : QR = P'Q' : Q'R'$. — Haben die vier Punkte P, Q, R, S eine solche Lage, dass die Geraden PQ und RS einander parallel sind, so ist $PQR = PQS$, folglich auch $P'Q'R' = P'Q'S'$, folglich sind $P'Q'$ und $R'S'$ eben-

falls einander parallel. — Noch mehr: unter derselben Voraussetzung, dass PQ und RS, also auch $P'Q'$ und $R'S'$ parallel laufen, verhalten sich $PQS : RQS = PQ : RS$ und $P'Q'S' : R'Q'S' = P'Q' : R'S'$, folglich $PQ : RS = P'Q' : R'S'$, d. h. Theile von Parallelen in der einen Figur verhalten sich eben so, wie die entsprechenden Theile in der andern.

c. Den zwei in §. 145. und §. 146. gegebenen Erklärungen der Affinität lässt sich noch eine sehr einfache dritte hinzufügen, welche auf dem eben bewiesenen Satze beruht, dass einander entsprechende Gerade durch einander entsprechende Punkte nach einerlei Verhältniss getheilt werden. Zwei ebene Figuren sind sich hiernach affin, wenn in der einen Figur der geradlinige Abstand je zweier Punkte von der Geraden, die je zwei andere Punkte verbindet, in demselben Verhältnisse geschnitten wird, in welchem dies von den entsprechenden Geraden der andern Figur geschieht. Oder: denkt man sich je zwei Punkte einer jeden Figur durch Gerade verbunden, so müssen, wenn die Figuren affin heissen sollen, die Verhältnisse, nach welchen bei der einen Figur eine jede dieser Geraden von den übrigen Geraden geschnitten wird, den auf dieselbe Weise in der andern Figur sich bildenden Verhältnissen gleich seyn.

Sind die Figuren einander ähnlich, so sind die Verhältnisse auch zwischen solchen Abschnitten, welche nicht Theile einer und derselben Geraden sind, in beiden Figuren einander gleich. Bei affinen Figuren sind also nur je zwei Reihen sich entsprechender Punkte, welche in zwei sich entsprechenden Geraden liegen, ähnliche Systeme von Punkten, z. B. A, M, N, C, und A', M', N', C' (Fig. 29.).

§. 150. Es ist nun nicht schwer, den Begriff der Affinität auch auf körperliche Figuren auszudehnen. So wie nämlich die Affinität ebener Figuren aus der barycentrischen Bestimmung von Punkten in einer Ebene hervorging, eben so wird die Affinität von Figuren dreier Dimensionen aus der barycentrischen Bestimmung von Punkten im Raume abzuleiten seyn. Seyen demnach $A, B, C, D, E, \ldots$ und $A', B', C', D', E', \ldots$ zwei Systeme von Punkten im Raume, so werden diese Systeme einander affin heissen, wenn ihre Punkte sich dergestalt entsprechen, A' dem A, B' dem B, u. s. w., dass, wenn A, B, C, D in dem einen und A', B', C', D' in dem andern zu F.punkten genommen werden, in den Ausdrücken je zweier anderer sich entsprechender Punkte die sich entsprechenden F.punkte gleiche Coëfficienten haben, z. B. $E \equiv aA + bB + cC + dD$, $E' \equiv aA' + bB' + cC' + dD'$.

Ist also das System $A, B, C, D, E, \ldots$ gegeben, und soll ein demselben affines $A', B', C', D', E', \ldots$ construirt werden, so nehme man die vier ersten Punkte A', B', C', D' willkührlich. Um aber einen der übrigen, z. B. E', zu finden, ziehe man die Gerade ED, welche die F.ebene ABC in Y schneide, und verbinde Y und C durch eine Gerade, welche die F.linie AB in Z treffe. Man theile hierauf $A'B'$ in Z', $C'Z'$ in Y' und $D'Y'$ in E' nach denselben Verhältnissen, nach welchen AB in Z, CZ in Y und DY in E getheilt ist, und man hat E' gefunden.

§. 151. Seyen P, Q, R, S, T beliebige fünf Punkte des einen Systems und P', Q', R', S', T' die ihnen entsprechenden des andern, dass also, wenn $P \equiv pA + qB + rC + sD$, auch $P' \equiv pA' + qB' + rC' + sD'$ ist, u. s. w. Alsdann folgt eben so, wie in §. 145., dass, wenn man P, Q, R, S zu F.punkten nimmt, und in Bezug auf dieselben $T \equiv \pi P + \varkappa Q + \varrho R + \sigma S$ findet, auch $T' \equiv \pi P'$

$+\varkappa Q'+\varrho R'+\sigma S'$ seyn muss, dass folglich (§. 26. *c.*) die fünf Pyramiden, welche sich aus irgend fünf Punkten des einen Systems, als Spitzen genommen, bilden lassen, ihrem körperlichen Inhalte nach, in denselben Verhältnissen zu einander stehen, wie die entsprechenden Pyramiden des andern Systems. Durch Verbindung und Zusammensetzung solcher Verhältnisse ergiebt sich dann weiter, dass überhaupt je zwei Pyramiden der einen Figur, oder noch allgemeiner, — weil jeder begränzte körperliche Raum durch Diagonalebenen in Pyramiden zerlegt werden kann, — dass je zwei Räume der einen Figur dasselbe Verhältniss zu einander haben, als wie die entsprechenden Räume der andern. Und hierin besteht das Wesen der Affinität bei körperlichen Figuren.

§. 152. Man nehme D zum Anfangspunkte eines Coordinatensystems, und DA, DB, DC zu den drei Axen desselben, so sind die Coordinaten von P (§. 125. *b.*):

$$x=\frac{p}{p+q+r+s}.DA,\quad y=\frac{q}{p+\ldots}.DB,\quad z=\frac{r}{p+\ldots}.DC;$$

und eben so in der affinen Figur, wenn man $D'A'$, $D'B'$, $D'C'$ zu den drei Axen nimmt, die Coordinaten von P':

$$x'=\frac{p}{p+\ldots}.D'A',\quad y'=\frac{q}{p+\ldots}.D'B',\quad z'=\frac{r}{p+\ldots}.D'C',$$

folglich

$$x'=\frac{D'A'}{DA}.x,\quad y'=\frac{D'B'}{DB}.y,\quad z'=\frac{D'C'}{DC}.z.$$

Sind also von den Punkten einer Figur im Raume, auf drei Axen bezogen, die Coordinaten gegeben, so lässt sich, ähnlicherweise wie in §. 146., eine affine Figur construiren, wenn man ein zweites System dreier Axen unter beliebigen Winkeln bildet, und in diesem Systeme die Coordinaten jeder Axe den gegebenen Coor-

dinaten der entsprechenden Axe, jeder Axe nach einem andern Verhältnisse, proportional macht. Da ferner je beliebige vier Punkte der einen Figur und die ihnen entsprechenden der andern zu F.punkten genommen werden können, und in Bezug auf dieselben je zwei andere sich entsprechende Punkte durch einerlei Coëfficienten ausgedrückt werden (§. 151.), so erhellet, dass auch bei körperlichen Figuren die Affinität sich nicht auf ein einziges Axensystem beschränkt, sondern dass jedem beliebigen Axensysteme für die eine Figur ein entsprechendes für die andere zukommt.

§. 153. Zusätze. *a.* Liegen drei Punkte der einen Figur in einer Geraden, oder vier Punkte in einer Ebene, so sind auch die ihnen entsprechenden drei oder vier Punkte der andern Figur in einer Geraden oder Ebene enthalten. Einer Geraden entspricht daher eine Gerade, einer Ebene eine Ebene. Dies lässt sich durch ein ähnliches Verfahren, wie in §. 148. bei Figuren in Ebenen, darthun, kann aber auch unmittelbar aus den allgemeinen Ausdrücken für Gerade und Ebenen (§. 45. und §. 49.) gefolgert werden, indem man darin für $A, .. D$ nur $A', .. D'$ resp. zu setzen braucht, um die Ausdrücke für die entsprechenden Geraden und Ebenen der andern Figur zu erhalten.

Ueberhaupt leuchtet ein, dass alle Verhältnisse und Eigenschaften einer Figur, welche sich durch die Coëfficienten der F.punkte ausdrücken lassen, in allen affinen Figuren auf gleiche Art statt finden müssen. Wenn daher in einer Figur zwei Gerade einander parallel sind, oder sich schneiden (§. 48.), oder wenn zwei Ebenen einander parallel sind (§. 53.), oder wenn drei Ebenen sich in derselben Geraden schneiden (§. 55.), u. s. w., so werden auch in jeder affinen Figur die entsprechen-

den Geraden sich entweder parallel seyn, oder sich schneiden, die entsprechenden zwei Ebenen einander parallel seyn, u. s. w. Alle Verhältnisse dagegen, welche durch die Coëfficienten der F.punkte nicht dargestellt werden können, sind bei affinen Figuren von der einen zu der andern veränderlich; z. B. die Winkel einer Figur, die Verhältnisse zwischen geraden Linien, welche einen Winkel mit einander bilden, die Verhältnisse zwischen dem Inhalt ebener Figuren, die nicht in einer und derselben Ebene oder in parallelen Ebenen liegen, u. s. w.

b. Wenn bei einem Systeme von Punkten im Raume irgend vier Punkte in einer Ebene liegen, so muss zwischen diesen allein schon eine Gleichung obwalten (§. 24. *b.*), also dieselbe Gleichung auch zwischen den entsprechenden vier Punkten des affinen Systems bestehen. Zwischen den erstern und den letztern vier Punkten findet folglich auch die vorhin für Systeme in Ebenen erklärte Affinität statt. Auf gleiche Art werden bei Systemen im Raume auch je zwei sich entsprechende Gerade durch die in ihnen liegenden sich entsprechenden Punkte nach einerlei Verhältnissen getheilt.

Man kann hiernach für die Affinität körperlicher Figuren noch folgende Eigenschaften als Definitionen aufstellen: dass, wenn je drei Punkte einer jeden Figur durch Ebenen verbunden werden, die ebenen Figuren, welche in je zwei sich entsprechenden Ebenen von den Durchschnitten derselben mit den übrigen Ebenen gebildet werden, in der oben für affine Figuren in Ebenen erklärten Beziehung stehen; oder, dass jede der Geraden, in denen je zwei Ebenen der einen Figur einander schneiden, von den übrigen Ebenen nach denselben Ver-

hältnissen geschnitten wird, nach welchen dies bei den entsprechenden Stücken der andern Figur geschieht.

§. 154. Was endlich noch die Affinität bei Systemen von Punkten anlangt, die in geraden Linien liegen, so werden die Systeme A, B, C und A', B', C' einander affin seyn, wenn, $C \equiv aA + bB$ gesetzt, $C' \equiv aA' + bB'$ ist, also wenn $AC : CB = A'C' : C'B'$. Hier ist also die Affinität mit der Aehnlichkeit ganz einerlei.

Vergleicht man damit die in §. 145. und §. 151. gegebenen Erklärungen für die Affinität von Systemen in Ebenen und im Raume, so sieht man, dass, — auf gleiche Art, wie bei einem System im Raume die Theile des Raums, welche durch Verbindung je dreier Punkte durch Ebenen entstehen, und bei einem System in einer Ebene die Theile der Ebene, welche man durch Verbindung je zweier Punkte durch Gerade erhält, — so auch bei einem System in einer Geraden die Theile derselben, in welche sie durch die darin liegenden Punkte getheilt wird, sich eben so zu einander verhalten, wie die entsprechenden Theile des andern Systems.

Ueberhaupt also besteht das Eigenthümliche der Affinität in der Gleichheit aller Verhältnisse zwischen den sich entsprechenden Theilen des jedesmaligen Raumes, in welchem die Figuren enthalten sind, nicht auch der Verhältnisse zwischen den sich entsprechenden Begränzungen der Theile.

§. 155. Eben so, wie wir durch die Construction gleicher und ähnlicher und bloss ähnlicher Figuren zu Sätzen geleitet wurden, nach welchen bei einem Systeme von Punkten aus einer gewissen Anzahl von einander unabhängiger, durch die gegenseitige Lage der Punkte bestimmter Stücke alle übrigen Stücke des Systems gefun-

den werden konnten: so wird auch die Construction affiner Figuren uns zu neuen Sätzen dieser Art hinführen.

Hatte man ein System von n Punkten $A, B, C, D, \ldots$ in einer Ebene, und sollte ein demselben affines System construirt werden, so wurden (§. 145.) die den ersten drei Punkten A, B, C entsprechenden Punkte A', B', C' nach Belieben genommen. Um aber für einen der übrigen $n-3$ Punkte, z. B. für D, den entsprechenden D' zu finden, wurde D' in der Ebene $A' B' C'$ so bestimmt, dass die zwei Verhältnisse der Dreiecksflächen $D'B'C' : D'C'A'$ und $D'C'A' : D'A'B'$ den Verhältnissen der entsprechenden Dreiecke $DBC : DCA$ und $DCA : DAB$ resp. gleich waren. In Allem wurden daher $2(n-3)$ Verhältnisse von Dreiecksflächen des einen Systems eben so viel Verhältnissen des andern gleich gemacht, worauf dann erwiesenermassen auch alle andern Verhältnisse zwischen sich entsprechenden Flächentheilen beider Figuren einander gleich seyn mussten. Von den erstern $2(n-3)$ Verhältnissen müssen folglich alle übrigen Verhältnisse zwischen den Flächentheilen des Systems als Functionen darstellbar seyn. Also überhaupt:

Sind bei einem Systeme von n Punkten in einer Ebene, von den gegenseitigen Verhältnissen der Flächentheile, welche durch geradlinige Verbindung je zweier Punkte des Systems entstehen, irgend $2n-6$ von einander unabhängige gegeben, so kann man daraus alle übrigen Verhältnisse dieser Art finden.

Besteht das System nur aus drei Punkten, so wird $2n-6=0$, indem durch Verbindung von drei Punkten nur Eine Fläche, also noch kein Verhältniss zwischen Flächen bestimmt wird. Bei Systemen von 4, 5, 6, 7, 8, ...

Punkten werden 2, 4, 6, 8, 10, ... Verhältnisse als gegeben erfordert.

Die Lösung der mancherlei Aufgaben, welche diesem Satze zufolge gebildet werden können, geschieht am bequemsten mittelst des barycentrischen Calculs.

Man nehme von den n Punkten $A, B, C, D, \ldots$ irgend drei, z. B. A, B, C, zu F.punkten, und setze die $n-3$ übrigen Punkte $D, E, \ldots$ auf erstere bezogen:

$$dA + d'B + C = (d + d' + 1)D,$$
$$eA + e'B + C = (e + e' + 1)E,$$
u. s. w.

Weil dabei der Coëfficient von C immer $=1$ gesetzt ist, so bezeichnen die $2(n-3)$ Buchstaben $d, d', e, \ldots$ nicht bloss in bestimmten Verhältnissen stehende Zahlen, sondern bestimmte Zahlen selbst. — Aus diesen Gleichungen nun kann man durch successive Elimination der Punkte A, B und C eine Gleichung zwischen je vier andern Punkten des Systems, (D, E, F, G), ableiten, und hieraus nach §. 24. c. das Verhältniss je zweier Dreiecke, die eine gemeinschaftliche Seite haben, ($DEF : EFG$), durch $d, d', e, \ldots$ ausgedrückt finden. Durch Verbindung und Zusammensetzung dieser Verhältnisse wird man weiter die $2n-6$ gegebenen Verhältnisse und ein $(2n-5)$tes gesuchtes als Functionen von $d, d', e, \ldots$ darstellen können, und somit $2n-5$ Gleichungen erhalten, aus denen endlich nach Elimination der $2n-6$ Hülfsgrössen $d, d', e, \ldots$ die Gleichung zwischen den gegebenen Verhältnissen und dem gesuchten hervorgeht.

§. 156. **Zusatz.** Ausser den Verhältnissen zwischen Flächentheilen können die gegebenen und zu suchenden Stücke auch beliebige Functionen jener Verhältnisse seyn. Dahin gehören alle diejenigen Verhältnisse

und Bedingungen, welche das System mit jedem ihm affinen Systeme gemein hat, also unter andern die Verhältnisse zwischen den Theilen einer und derselben Geraden (§. 148.). Man denke sich nun die n Punkte in einer gewissen Folge, und verbinde hiernach den ersten Punkt mit dem zweiten, den zweiten mit dem dritten, etc. und den nten mit dem ersten durch gerade Linien, so erhält man ein System von n, von einander unabhängigen, Geraden, durch welche umgekehrt die anfänglichen n Punkte bestimmt sind. Alle Verhältnisse folglich, nach denen jede der n Geraden von den $n-1$ übrigen geschnitten wird, werden sich finden lassen, wenn man irgend $2(n-3)$ dieser Verhältnisse kennt. Da nun alle Verhältnisse zwischen den Abschnitten einer Geraden, welche durch n in derselben liegende Punkte sich bilden, durch $n-2$ (§. 143. $c.$), und daher bei $n-1$ Punkten durch irgend $n-3$ von einander unabhängige Verhältnisse bestimmt werden, so folgern wir:

Sind bei einem Systeme gerader Linien in einer Ebene die Verhältnisse gegeben, nach denen von irgend zweien dieser Geraden jede für sich von den jedesmal übrigen geschnitten wird, so können daraus die Verhältnisse zwischen den Abschnitten jeder andern Geraden des Systems gefunden werden.

Dass auch die hierunter begriffenen Aufgaben sich leicht mittelst des barycentrischen Calculs lösen lassen, sieht man von selbst.

§. 157. Beispiele. 1) AB, BC, CD, DA (Fig. 30.) sind vier Gerade in einer Ebene, von denen sich AB und CD in E, AD und BC in F schneiden. Aus den dadurch sich bildenden Verhältnissen $AE:EB=a$ in der ersten, und $BF:FC=b$ in der zweiten Geraden, die

Verhältnisse $CE:ED=x$ in der dritten, und $DF:FA=y$ in der vierten zu finden.

Man setze: $dA+d'B+C=(1+d+d')D$,

so ist (§. 24. $d.$) : $E\equiv dA+d'B\equiv(1+d+d')D-C$,

$$F\equiv d'B+C\equiv(1+d+d')D-dA,$$

mithin $AE:EB=d':d=a$,

$$BF:FC=1:d'=b,$$

$$CE:ED=-(1+d+d')=x,$$

$$DF:FA=-d:1+d+d'=y.$$

Hieraus folgt nach Elimination von d und d':

$$1+x=-\frac{1}{b}\left(1+\frac{1}{a}\right),\ \text{d. h.}\ \frac{DC}{DE}=\frac{FC}{FB}\cdot\frac{AB}{AE},$$

und $1+\frac{1}{y}=-a(1+b)$, d. h. $\frac{DA}{DF}=\frac{EA}{EB}\cdot\frac{CB}{CF}$.

2) Bei einem Systeme von fünf Punkten $A,\ldots E$ in einer Ebene (Fig. 31.), aus den vier Verhältnissen von Dreiecken

$$ABC:CDA=p,\quad BCD:DAB=q,$$

$$ABE:CDE=r,\quad DAE:BCE=s,$$

das Verhältniss $DBE:ACE=t$ zu finden.

Man setze: I. $dA+d'B+C-d''D=0$,

II. $eA+e'B+C-e''E=0$,

wo $d''=1+d+d'$ und $e''=1+e+e'$. Durch Elimination von C und A bekommt man:

III. $(d-e)A+(d'-e')B-d''D+e''E=0$,

IV. $(de'-ed')B+(d-e)C+ed''D-de''E=0$.

Aus diesen vier Gleichungen fliessen nun folgende Proportionen:

$$BCD:CDA:DAB:ABC=d:-d':1:d'',$$

$$BCE:CEA:EAB=e:-e':1,$$

$BDE : DEA : EAB = d - e : e' - d' : - d''$,

$CDE : EBC = de' - ed' : ed''$;

und hieraus weiter:

1) $ABC : CDA = -\frac{d''}{d'} = p$,

2) $BCD : DAB = d = q$,

3) $ABE : CDE = \frac{EAB}{BCE} \cdot \frac{EBC}{CDE} = \frac{d''}{de' - ed'} = r$,

4) $DAE : BCE = \frac{DAE}{EAB} \cdot \frac{EAB}{BCE} = \frac{e' - d'}{ed''} = s$,

5) $DBE : ACE = \frac{DBE}{EAB} \cdot \frac{EAB}{CEA} = \frac{e - d}{e'd''} = t$.

Es ist jetzt noch übrig, aus diesen fünf Gleichungen die Hülfsgrössen d, d', e, e' wegzuschaffen. Die Elimination von e und e' aus 3), 4) und 5) giebt:

6) $d^2rs - d'^2rt + d''^2st = 1$.

Sodann ist nach 2) : $d = q$, und nach 1) : $-d'p = d'' = 1 + d + d' = 1 + q + d'$, folglich $d' = -\frac{1+q}{1+p}$, $d'' = \frac{p(1+q)}{(1+p)}$. Diese Werthe für d, d', d'' in 6) substituirt, erhält man das Resultat:

$$t = \frac{(1+p)^2(1 - q^2rs)}{(1+q)^2(p^2s - r)}.$$

§. 158. Betrachten wir jetzt ein System von n Punkten im Raume. Irgend vier Punkte dieses Systems zu F.punkten genommen, ist jeder der übrigen $n-4$ Punkte bestimmt durch die drei Verhältnisse, welche in seinem auf die erstern vier Punkte bezogenen Ausdrucke zwischen den Coëfficienten dieser Punkte statt finden, oder was dasselbe ist, durch die Verhältnisse zwischen den vier Pyramiden, deren Grundflächen die vier Seiten der

F.pyramide, und deren gemeinschaftliche Spitze der zu bestimmende Punkt ist. Von diesen Verhältnissen, deren Gesammtzahl hiernach $3(n-4)$ beträgt, ist aber das gegenseitige Verhältniss je zweier anderer Pyramiden oder körperlicher Figuren überhaupt, die durch Verbindung der Punkte des Systems durch Ebenen entstehen, eine abhängige Grösse (§. 151.). Mithin nach der schon mehrmals angewendeten Schlussfolge:

Wenn bei einem Systeme von n Punkten im Raume je drei Punkte durch Ebenen verbunden werden, und von den Verhältnissen zwischen den durch diese Ebenen begränzten Theilen des Raums irgend $3n-12$ von einander unabhängige gegeben sind, so kann daraus jedes andere Verhältniss dieser Art gefunden werden.

Bei einem Systeme von 5, 6, 7, 8, ... Punkten im Raume werden also 3, 6, 9, 12, ... solcher Verhältnisse als gegeben erfordert.

§. 159. Zusatz. Heissen die n Punkte des Systems: $A, B, C, D, E, \ldots L, M, N$. Man verbinde sie in der genannten Ordnung, und indem man auf N wieder A folgen lässt, je drei durch Ebenen, so erhält man ein System von n Ebenen: $ABC, BCD, CDE, \ldots LMN, MNA, NAB$, durch welche hinwiederum die n erstern Punkte als die Durchschnitte je dreier auf einander folgender Ebenen dieser Reihe, das Ende derselben mit dem Anfang verbunden gedacht, bestimmt werden. Es lassen sich aber alle Verhältnisse finden, nach denen die Durchschnittslinie irgend zweier Ebenen des Systems von den $n-2$ übrigen Ebenen getheilt wird, wenn man irgend $(n-2)-2$ von einander unabhängige dieser Verhältnisse kennt (§. 143. *c*.). Da nun diese Verhältnisse

zugleich Functionen der vorhin gedachten Verhältnisse zwischen den Theilen des Raumes sind (§. 153. *b.*), und weil $3[(n-2)-2] = 3n-12$ ist, so ziehen wir den Schluss:

Kennt man bei einem Systeme von Ebenen die Verhältnisse, in denen von irgend drei, nicht in derselben Ebene enthaltenen, Durchschnittslinien der Ebenen, jede dieser Linien von den jedesmal übrigen Ebenen getheilt wird, so kann man daraus alle übrigen Verhältnisse dieser Art, so wie auch die Verhältnisse zwischen den körperlichen, von den Ebenen des Systems begränzten Figuren finden.

§. 160. Man sieht leicht, dass alle aus den Sätzen der beiden vorigen §§. entspringenden Aufgaben, auf ähnliche Art, wie in §. 155., mittelst des barycentrischen Calculs gelöst werden können. — Heissen, wie bisher, $A, B, C, \ldots$ die n Punkte des Systems und werde

$$eA + e'B + e''C + D = (e + e' + e'' + 1)E,$$

$$fA + f'B + f''C + D = (f + f' + f'' + 1)F,$$

u. s. w.

gesetzt. Aus diesen $n-4$ Gleichungen lassen sich die gegebenen sowohl als die gesuchten Verhältnisse in Werthen der $3(n-4)$ Hülfsgrössen $e, e', e'', f, \ldots$ ausdrücken, und aus den somit hervorgehenden Gleichungen, nach Elimination jener Hülfsgrössen, die gesuchten Verhältnisse als Functionen der $3n-12$ gegebenen darstellen.

Um ein einfaches Beispiel hinzuzufügen, so bestehe das System aus 5 Punkten $A, \ldots E$, (Fig. 33.) und seyen von den 4 Verhältnissen, in welchen die 4 Geraden AE, BE, CE, DE von den durch die jedesmal drei übrigen

Punkte gelegten Ebenen geschnitten werden, AE von BCD in A', BE von CDA in B', etc., 3 Verhältnisse gegeben und das vierte gesucht. — Aus

$$eA + e'B + e''C + D = \varepsilon E,$$

wo $\varepsilon = e + e' + e'' + 1$, folgt (§. 26. *d.*):

$A' \equiv \varepsilon E - eA$, $B' \equiv \varepsilon E - e'B$, $C' \equiv \varepsilon E - e''C$, $D' \equiv \varepsilon E - D$;

mithin:

$$\frac{A'E}{A'A} + \frac{B'E}{B'B} + \frac{C'E}{C'C} + \frac{D'E}{D'D} = \frac{e + e' + e'' + 1}{\varepsilon} = 1,$$

wodurch die Aufgabe gelöst ist. — Man kann diese Formel folgendergestalt in Worten ausdrücken:

Verbindet man die vier Spitzen einer dreiseitigen Pyramide ABCD mit irgend einem fünften Punkte E durch Gerade, so ist die Summe der Verhältnisse, in welchen in jeder dieser vier Linien AE,... die Entfernungen A'E und A'A des fünften Punktes E und der Pyramidenspitze A von dem Durchschnitte A' mit der gegenüberliegenden Seite BCD der Pyramide zu einander stehen, der Einheit gleich.

Verbindet man die drei Spitzen eines Dreiecks ABC (Fig. 32.) mit irgend einem vierten in der Ebene des Dreiecks befindlichen Punkte D, und werden von diesen Linien AD, BD, CD die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks in A', B', C' geschnitten, so findet sich auf gleiche Art:

$$\frac{A'D}{A'A} + \frac{B'D}{B'B} + \frac{C'D}{C'C} = 1,$$

(oder noch etwas einfacher: $\frac{A'D}{A'A} + \frac{B'D}{B'B} = \frac{DC}{C'C}$.)

Viertes Capitel.

Von der Gleichheit.

§. 161. Zwei Dreiecke pflegt man einander gleich zu nennen, wenn sie einerlei Flächeninhalt haben. In eben dem Sinne nennt man ein Dreieck einem Vierecke, oder einem Kreise, und überhaupt zwei begränzte ebene Figuren einander gleich, ohne dabei für die begränzenden Linien selbst eine andere Rücksicht gelten zu lassen, als dass sie gleiche Flächen einschliessen. Gegenwärtig aber will ich Gleichheit der Figuren in einer engern Bedeutung nehmen, und diesen Ausdruck nur dann anwenden, wenn die Figuren nicht bloss im Ganzen, sondern auch in allen ihren einzelnen Theilen dem Flächeninhalte nach einander gleich sind; oder deutlicher:

Zwei ebene Figuren oder zwei Systeme von Punkten in Ebenen heissen einander g l e i c h, wenn jedem Punkte des einen Systems ein Punkt des andern auf eine solche Weise entspricht, dass je zwei geradlinige Figuren, deren Spitzen sich entsprechende Punkte sind, einerlei Flächeninhalt haben.

Nach dieser Erklärung wird also das Viereck $ABCD$ dem Viereck $A'B'C'D'$ gleich heissen, wenn nicht nur diese Vierecke selbst, sondern auch die in ihnen begriffenen, sich entsprechenden Dreiecke ABC und $A'B'C'$, BCD und $B'C'D'$, etc. dem Flächeninhalte nach einander gleich sind.

Dass ein solches Verhalten bei Figuren, welche einander gleich und ähnlich sind (§. 139.), immer statt finde, bedarf keiner Erörterung. Dass aber diese Gleichheit auch ohne Aehnlichkeit vorhanden seyn könne, erhellet aus der eben vorgetragenen Lehre von der Affinität. Denn setzen wir, dass bei zwei affinen Figuren in Ebenen irgend zwei sich entsprechende Flächentheile einander gleich sind, so müssen (§. 145.) auch je zwei andere sich entsprechende Flächentheile in dem Verhältnisse der Gleichheit stehen.

§. 162. Auf dieselbe Art wie bei ebenen Figuren, wird nun ferner auch bei Figuren im Raume der Begriff der Gleichheit aus dem der Affinität hervorgehen. Ist nämlich das constante Verhältniss, welches bei zwei affinen körperlichen Figuren zwischen je zwei sich entsprechenden körperlichen Theilen derselben obwalten muss, der Einheit gleich, so werden wir die Figuren selbst einander gleich nennen; oder: zwischen zwei Systemen von Punkten im Raume findet Gleichheit statt, wenn jedem Punkte des einen Systems ein Punkt des andern solchergestalt entspricht, dass je zwei Theile des Raums, deren begrenzende Ebenen durch sich entsprechende Punkte bestimmt werden, einerlei Inhalt haben. — So sind z. B. die zwei Systeme von fünf Punkten im Raume: A, B, C, D, E und $A', \ldots E'$ einander gleich, wenn die Pyramiden $ABCD$ und $A'B'C'D'$, $BCDE$ und $B' .. E'$, $CDEA$ und $C' .. A'$, etc. rücksichtlich ihres Inhalts sich paarweise gleich sind.

Bei Systemen von Punkten endlich, die in geraden Linien liegen, fällt die Gleichheit mit der Gleichheit und Aehnlichkeit zusammen, eben so wie die Affinität zweier solcher Systeme mit der Aehnlichkeit (§. 154.).

§. 163. Zusätze. *a.* So wie vorhin der Begriff der Gleichheit aus dem der Affinität abgeleitet wurde, so lässt sich auch umgekehrt die Affinität durch die Gleichheit erklären. Ist nämlich von drei Figuren die erste der zweiten gleich, und die zweite der dritten ähnlich, so ist die erste der dritten affin.

b. Die Gleichheit ist eine eben so specielle Art von der Affinität, als die Gleichheit und Aehnlichkeit von der Aehnlichkeit allein. Bei zwei affinen oder ähnlichen Figuren stehen je zwei sich entsprechende Stücke von gewisser Beschaffenheit in einem constanten aber unbestimmten Verhältnisse, dahingegen bei zwei bloss gleichen oder gleichen und ähnlichen Figuren dieses constante Verhältniss geradezu der Einheit gleich ist. Alles was in §. 148., §. 152. und §. 153. von der Affinität, als der allgemeinern Art von Verwandtschaft, gesagt worden ist, muss daher auch von der Gleichheit gelten.

§. 164. Ist ein System von n Punkten $A, B, C, D, \ldots$ in einer Ebene gegeben, und soll ein ihm gleiches $A', B', C', D', \ldots$ construirt werden, so nehme man die Punkte A', B' willkührlich; der Ort von C' ist alsdann eine Gerade, die mit $A'B'$ in einem solchen Abstande parallel läuft, dass die Dreiecksflächen $A'B'C'$ und ABC einander gleich sind. In Betreff der übrigen Punkte $D', E', \ldots$ verfahre man eben so, wie in §. 145. gelehrt wurde.

Hier wird also nächst den bei der Affinität (§. 155.) erforderlichen $2n-6$ von einander unabhängigen Verhältnissen ein Flächentheil selbst noch als gegeben verlangt, und dadurch jeder andere Flächentheil der Figur bestimmt. Denken wir uns nun jedes der $2n-6$ Verhält-

nisse als bestehend zwischen diesem gegebenen Flächentheile und einem von $2n-6$ andern Flächentheilen, die von einander und von dem gegebenen unabhängig sind, so sind mit diesen $2n-6$ Verhältnissen zugleich auch die $2n-6$ andern Flächentheile, also in Allem $2n-5$ Flächentheile gegeben, und wir erhalten somit folgenden Satz:

Wenn man bei einem Systeme von n Punkten in einer Ebene je zwei derselben durch Gerade verbindet und von den somit entstehenden geradlinigen Figuren irgend $2n-5$ von einander unabhängige ihrem Inhalte nach als gegeben annimmt, so kann man daraus den Inhalt jeder der übrigen finden.

Besteht also das System aus 4 Punkten, so müssen 3 Figuren gegeben seyn; bei 5 Punkten werden 5 Figuren, bei 6 Punkten 7 Figuren, etc. als gegeben verlangt, um daraus die übrigen bestimmen zu können.

§. 165. **Beispiele.** 1) Seyen in dem Systeme der vier Punkte A, B, C, D (Fig. 32.) die drei Dreiecke

$$BCD=a,\quad CAD=b,\quad ABD=c$$

gegeben, so ist (§. 18. *c.* II.):

$$\text{I.}\quad ABC=a+b+c.$$

Sind ferner A', B', C' die Durchschnitte der Geraden AD und BC, BD und CA, CD und AB, so verhält sich

$$AC':AB=AC'D:ABD=AC'C:ABC \text{ (§. 18. } b.\text{):}$$

$$=(AC'C-AC'D=ADC):(ABC-ABD),$$

d. i. $AC'D:c=AC'C:a+b+c=b:a+b$,

folglich II. $AC'D=\dfrac{bc}{a+b}$, III. $AC'C=\dfrac{b(a+b+c)}{a+b}$, und

eben so $\quad DB'A=\dfrac{bc}{a+c},\qquad BB'A=\dfrac{c(a+b+c)}{a+c},$

$$DC'B=\frac{ac}{a+b},\qquad \text{u. s. w.}$$

Man gehe noch weiter und ziehe die Geraden $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, so kann man auch die hiermit entstehenden neuen Dreiecke durch a, b, c ausdrücken. — Es verhält sich:

$$a+b:b = AB:AC' = \left(ABB' = \frac{c(a+b+c)}{c+a}\right) : AC'B'$$

mithin IV. $C'B'A = \dfrac{bc(a+b+c)}{(c+a)(a+b)}$.

Sodann ist: $ABD:ADB' = BD:DB' = C'BD:C'DB'$,

d. i. $c : \dfrac{bc}{a+c} = \dfrac{ac}{a+b} : C'DB'$, also

$$\text{V.}\quad B'C'D = \frac{abc}{(c+a)(a+b)}$$

$= m(b+c)$, wenn wir die symmetrische Function $\dfrac{abc}{(b+c)(c+a)(a+b)} = m$ setzen. Eben so ist $C'A'D = m(c+a)$, $A'B'D = m(a+b)$, folglich $A'B'C' = B'C'D + C'A'D + A'B'D = 2m(a+b+c)$, d. i.

$$\text{VI.}\quad A'B'C' = \frac{2abc(a+b+c)}{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

Werde noch verlangt, aus den drei Dreiecken

$$C'B'A = p, \quad A'C'B = q, \quad B'A'C = r$$

das Dreieck $A'B'C' = x$ zu bestimmen. — Nach IV. ist $p = \dfrac{bc(a+b+c)}{(c+a)(a+b)}$, und eben so $q = \dfrac{ca(a+b+c)}{(a+b)(b+c)}$, $r = \dfrac{ab(a+b+c)}{(b+c)(c+a)}$; nach VI. aber $x = \dfrac{2abc(a+b+c)}{(b+c)(c+a)(a+b)}$.

Hieraus folgt ganz leicht: $pqr = \frac{1}{4}x^2(a+b+c)$. Zugleich aber ist $p+q+r+x = ABC = a+b+c$; mithin $pqr = \frac{1}{4}x^2(p+q+r+x)$, so dass man, um x zu finden, die kubische Gleichung zu lösen hat:

$$x^3 + (p+q+r)x^2 - 4pqr = 0.$$

2) Beliebige fünf Punkte A, B, C, D, E (Fig. 34.) in einer Ebene sind je zwei durch gerade Linien verbunden. Aus den Flächen der somit entstehenden fünf Dreiecke

$$EAB=a,\quad ABC=b,\quad BCD=c,\quad CDE=d,\quad DEA=e$$

die Fläche des Fünfecks $ABCDE=x$ zu finden. —

Man setze, wie in §. 157. 2.:

$$\delta A+\delta' B+C=\delta'' D$$

$$\varepsilon A+\varepsilon' B+C=\varepsilon'' E$$

und daher $(\delta-\varepsilon)A+(\delta'-\varepsilon')B=\delta'' D-\varepsilon'' E$.

Hieraus folgt:

1) $CDA:DAB=-\delta'$, 2) $ABC:DAB=\delta''$,

3) $CEA:EAB=-\varepsilon'$, 4) $DEA:EAB=(\delta'-\varepsilon'):\delta''$;

und wenn man in 4) die Werthe von δ', δ'', ε' aus 1), 2), 3) substituirt:

5) $ABC.DEA+EAB.CDA=CEA.DAB$.

Nun ist der gewählten Bezeichnung zufolge und mit Hinblick auf die Figur: $ABC=b$, $DEA=e$, $EAB=a$, $CDA=x-b-e$, $CEA=x-b-d$, $DAB=x-c-e$. Hierdurch wird die Gleichung 5):

$$be+a(x-b-e)=(x-b-d)(x-c-e),$$

und nach gehöriger Reduction:

$$x^2-(a+b+c+d+e)x+ab+bc+cd+de+ea=0,$$

wonach also der Aufgabe, wenn diese Gleichung mögliche Wurzeln hat, im Allgemeinen zwei verschiedene Werthe für die Fünfecksfläche Genüge leisten. Hat man diese Werthe berechnet, so kann nun für den einen oder den andern das Fünfeck $ABCDE$ selbst auf folgende Weise construirt werden.

Man nehme A und B willkührlich und ziehe mit AB in einem Abstande $=b:2AB(=ABC:2AB)$ eine Paral-

lele, in welcher man C nach Belieben bestimme. Man ziehe ferner mit AB eine Parallele in dem Abstande $x-c-e:\frac{1}{2}AB(=ABD:\frac{1}{2}AB)$, und mit BC eine Parallele in dem Abstande $c:\frac{1}{2}BC(=BCD:\frac{1}{2}BC)$, so wird D der Durchschnitt dieser zwei Parallelen seyn. Nur bemerke man, dass erstere, (letztere) Parallele mit C, (A) auf einerlei Seite von AB, (BC) oder auf der entgegengesetzten liegen muss, je nachdem $x-c-e$, (c) mit b einerlei oder verschiedene Vorzeichen hat. Auf dieselbe Art wie D, kann nun auch E mittelst der ihrem Inhalte nach gegebenen Dreiecke $ABE=a$ und $BCE=x-a-d$ gefunden werden.

Anmerkung. Das Fünfeck $ABCDE$ in Fig. 34. ist von der Beschaffenheit, dass der Perimeter desselben, ohne sich selbst zu schneiden, in sich zurückkehrt. Man sieht aber bald, dass man bei der eben gelehrten Construction sehr oft auch solche Fünfecke bekommen wird, deren Perimeter Doppelpunkte, Durchschnittspunkte mit sich selbst, enthält. (Von dieser Form sind die Fünfecke in Fig. 35. mit einem, in Fig. 36. mit zwei, in Fig. 37. mit drei, in Fig. 38. mit fünf Doppelpunkten.) Aus dem Vorigen ist leicht abzunehmen, was man unter dem Inhalte eines solchen Fünfecks zu verstehen hat. Immer nämlich werden die Formeln mit der Construction in Uebereinstimmung seyn, wenn man die Fläche des Fünfecks $ABCDE$ als die Summe der Dreiecke $DEA+DAB+DBC$ oder $EAB+EBC+ECD$, etc., mit gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen dieser Dreiecke (§. 17.), definirt.

Dass diese Summen, von denen die eine aus der andern durch Verwandlung der Buchstaben in die nächst höhern entspringt, bei einem und demselben Fünfecke dessen Flächeninhalte gleich, und folglich auch unter einander gleich sind, begreift man bei einem Fünfecke, dessen Perimeter von einer Geraden in nicht mehr, als zwei Punkten geschnitten werden kann, ohne weitere Erörterung. Ist aber das Fünfeck von nicht so einfacher Form, so bedarf die Gleichheit jener Summen eines Beweises, der sich folgendergestalt führen lässt.

Zuerst behaupte ich, dass die Summe der fünf Dreiecke

$$(1)\quad \Sigma=PAB+PBC+PCD+PDE+PEA$$

immer dieselbe bleibt, wo auch der Punkt P in der Ebene der fünf Punkte $A,\ldots E$ genommen werden mag. Denn, weil $PCA+PAC=0$ und $PDA+PAD=0$, (§. 18. a.), so hat man auch

$$(2)\quad \Sigma = PAB + PBC + PCA + PAC + PCD + PDA + PAD + PDE + PEA.$$

Nun ist nach §. 18. c. $PAB + PBC + PCA = ABC$, und eben so die Summe der drei folgenden Glieder $= ACD$, und die Summe der drei letzten $= ADE$, folglich

$$(3)\quad \Sigma = ABC + ACD + ADE,$$

und daher Σ unabhängig von der Lage des Punktes P. Dieser unveränderliche Werth von Σ muss daher auch statt finden, wenn man in (1) P mit einem der fünf Punkte selbst identisch annimmt. In der That, lässt man P mit A zusammenfallen, so werden die Dreiecke PAB und PEA null, und Σ reducirt sich auf den letzterhaltenen Ausdruck (3). Nimmt man aber P mit D oder E identisch, so kommen die vorhin gedachten Summen $DEA + ..$, $EAB + ...$ Von welcher Gestalt daher auch das Fünfeck $ABCDE$ seyn mag, so haben diese Summen doch einerlei Werth unter sich, einen Werth, der, wenn der Perimeter keine Doppelpunkte hat, der Flächeninhalt des Fünfecks ist, und der folglich, wenn man die Untersuchung auf Fünfecke mit Doppelpunkten ausdehnt, als der Inhalt auch dieser Figuren anzusehen ist.

Man sieht leicht, wie diese Betrachtungen sich verallgemeinern lassen, so dass überhaupt bei einem n Ecke $AB...MN$ die Summe der n Dreiecksflächen

$$PAB + PBC + ... + PMN + PNA$$

von der Lage des Punktes P ganz unabhängig ist und zugleich den Flächeninhalt des Vielecks vorstellt, von welcher Form dieses auch seyn mag.

§. 166. Zusätze. Die im letzten Beispiele gefundene Relation:

$$ABC . DEA + EAB . CDA = CEA . DAB$$

lässt sich folgendergestalt aussprechen:

Von sechs Dreiecken in einer Ebene, welche eine gemeinschaftliche Spitze (A) *und die vier Seiten und zwei Diagonalen eines Vierecks* ($BCDE$) *zu Grundlinien haben, ist die Summe der zwei Producte aus den Dreiecken über den gegenüberliegenden Seiten*

(BC und DE, BE und CD) *gleich dem Producte aus den Dreiecken über den Diagonalen* (BD und CE). *)

b. Schreibt man die sechs Dreiecke so, dass A in jedem der erste Buchstabe wird, und bringt alle Glieder auf eine Seite, so kommt (§. 18. *a.*):

$$ABE.ACD + ACE.ADB + ADE.ABC = 0,$$

eine Formel, deren Symmetrie rücksichtlich A, E und BCD in die Augen fällt.

c. Es verdient diese Relation noch um deswillen eine besondere Aufmerksamkeit, weil mittelst derselben allein alle Aufgaben, wo bei einem Systeme von n Punkten $A, \ldots N$ in einer Ebene aus $2n-5$ Figuren eine $(2n-4)$te gefunden werden soll, ohne weiteres gelöst werden können. — Man setze das Dreieck $ABC = a$, die $n-3$ Dreiecke $ABD, ABE, ABF, \ldots$ resp. $= d, e, f, \ldots$; und die $n-3$ Dreiecke ACD, ACE, ACF, ... resp. $= d', e', f', \ldots$; so lässt sich mittelst dieser $2n-5$ Dreiecke $a, d, d', e, \ldots$ jedes andere Dreieck des Systems, welches A zur Spitze hat, z. B. AEH, bestimmen. Denn bei dem Vierecke $BCEH$ sind a, e, h, e', h' die Dreiecke über den Seiten und Diagonalen BC, BE, BH, CE, CH, woraus sich dann nach dem obigen Satze das Dreieck AEH über der Seite EH finden lässt. Da nun die Fläche jeder geradlinigen Figur in der Ebene des Systems, durch Verbindung der Spitzen der Figur mit A, einem Aggregate von Dreiecken gleich zu achten ist, welche A zur gemeinschaftlichen Spitze haben, so kann man jede der $2n-5$ gegebenen und die $(2n-4)$te Figur in Werthen

*) Man wird sich hierbei des der Form nach sehr ähnlichen Satzes erinnern, dass, wenn um ein Viereck $BCDE$ ein Kreis beschrieben werden kann,

$$BC.DE + BE.CD = BD.CE \text{ ist.}$$

von $a, d, d', e, \ldots$ ausdrücken, und aus den somit sich bildenden $2n-4$ Gleichungen durch Elimination jener $2n-5$ Hülfsgrössen $a, d, \ldots$ den Inhalt der gesuchten Figur in Werthen der gegebenen Figuren finden.

§. 167. Ist ein System von Punkten $A, B, C, D, \ldots$ im Raume gegeben, und soll ein ihm gleiches $A', B', C', D', \ldots$ construirt werden, so nehme man die drei ersten Punkte A', B', C' nach Willkühr und den vierten D' in einer Ebene, welche mit $A'B'C'$ in einem solchen Abstande parallel läuft, dass eine Pyramide, welche in der Ebene ihre Spitze und $A'B'C'$ zur Grundfläche hat, der Pyramide $ABCD$ gleich ist. Jeder der übrigen Punkte $E, \ldots$ wird hierauf eben so, wie in §. 150. bei Construction eines affinen Systems gefunden.

§. 168. Erwiesenermassen kann man bei einem Systeme von n Punkten im Raume aus irgend $3n-12$ von einander unabhängigen Verhältnissen zwischen körperlichen Theilen alle übrigen Verhältnisse von derselben Art ableiten. Nun werden zur Bildung von $3n-12$ von einander unabhängigen Verhältnissen wenigstens $3n-11$ von einander unabhängige Grössen erfordert. Sind daher die Verhältnisse zwischen $3n-11$ von einander unabhängigen Theilen gegeben, so kann man daraus die Verhältnisse derselben zu den übrigen Theilen, und mithin, wenn überdiess von einem der $3n-11$ Theile der Inhalt selbst gegeben ist, den Inhalt jedes andern finden. — Wir erhalten hierdurch folgenden, auf die Natur der Gleichheit körperlicher Figuren gegründeten, Satz:

Werden bei einem Systeme von n Punkten im Raume je drei derselben durch Ebe-

nen verbunden, und sind von den somit entstehenden Theilen des Raumes irgend $3n-11$ von einander unabhängige ihrem Inhalte nach gegeben, so kann man daraus den Inhalt jedes der übrigen bestimmen.

§. 169. Beispiel. Bestehe das System aus 5 Punkten A, B, C, D, E, und seyen die $3.5-11=4$ Pyramiden $EBCD$, $ECDA$, $EDAB$, $EABC$ gegeben, welche E zur gemeinschaftlichen Spitze, und die Seiten der Pyramide $ABCD$ zu Grundflächen haben, ihrem Inhalte nach gegeben. Die Seiten BCD, CDA,.. dieser Pyramide werden von den Geraden, welche die gegenüberliegenden Spitzen A, B,.. mit E verbinden, resp. in A', B', C', D' geschnitten; man verlangt den Inhalt der Pyramide $A'B'C'D'$ (Fig. 33.).

Man setze $BCDE=a$, $CDEA=b$, $DEAB=c$, $EABC=d$,

und $a+b+c+d=-ABCD$ (§. 20. d.) $=e$,

so ist (§. 26. b.) $aA+bB+cC+dD=eE$,

folglich (§. 26. d.)

$$eE-aA=(e-a)A',$$
$$eE-bB=(e-b)B',$$
$$eE-cC=(e-c)C',$$
$$eE-dD=(e-d)D';$$

und, wenn man diese fünf Gleichungen addirt:

$$3eE=(e-a)A'+(e-b)B'+(e-c)C'+(e-d)D'.$$

Hiernach verhält sich (§. 20. b.):

$$EABC : EA'BC = EA : EA' = e-a : -a,$$
$$EA'BC : EA'B'C = EB : EB' = e-b : -b,$$
$$EA'B'C : EA'B'C' = EC : EC' = e-c : -c,$$
$$EA'B'C' : A'B'C'D' = e-d : -3e, \text{ (§. 25.)}$$

folglich

$$EABC : A'B'C'D' = (e-a)(e-b)(e-c)(e-d) : 3abce;$$

und weil $EABC = d$, und wenn man für e wieder $a + b + c + d$ schreibt:

$$A'B'C'D' = \frac{3abcd\,(a+b+c+d)}{(b+c+d)\,(c+d+a)\,(d+a+b)\,(a+b+c)}.$$

§. 170. Statt mehrerer Beispiele will ich zwei Relationen zwischen Pyramiden noch mittheilen, welche für die hierher gehörigen Aufgaben von demselben Nutzen seyn werden, als es für ebene Figuren die Relation in §. 166. zwischen Dreiecken war.

Seyen A, B, C, D, E, F, G beliebige sieben Punkte im Raume. Die vier ersten zu F.punkten genommen, seyen die Ausdrücke der drei letzten:

$$aA + bB + cC + dD = eE,$$
$$a'A + b'B + c'C + d'D = fF,$$
$$a''A + b''B + c''C + d''D = gG.$$

Man eliminire aus den zwei ersten dieser Gleichungen zuerst A und sodann B, so kommt:

$$(ab' - a'b)\,B - (ca' - c'a)\,C + (ad' - a'd)\,D + a'eE - afF = 0,$$
$$(ab' - a'b)\,A - (bc' - b'c)\,C + (b'd - bd')\,D - b'eE + bfF = 0.$$

Mithin verhält sich:

$$CDEF : DEFB = ab' - a'b : -(ca' - c'a)$$
$$CDEF : DEFA = ab' - a'b : -(bc' - b'c),$$

folglich, weil (§. 20. a.) $DEFB = -BDEF$, $DEFA = -ADEF$,

$$ADEF : BDEF : CDEF = bc' - b'c : ca' - c'a : ab' - a'b;$$

auch verhält sich zufolge des Ausdrucks für E:

$$a : b : c = BCDE : CDEA : DEAB$$
$$= BCDE : CADE : ABDE.$$

Da nun immer $a(bc' - b'c) + b(ca' - c'a) + c(ab' - a'b) = 0$, so bekommt man folgende zwischen ABC, DE und F ganz symmetrische Formel:

I. $ADEF.BCDE+BDEF.CADE+CDEF.ABDE=0$.

Schreibt man sie unter der Gestalt:

$$AFDE.BCDE+ABDE.CFDE=ACDE.BFDE,$$

so kann man sie folgendermassen in Worte fassen:

Von sechs dreiseitigen Pyramiden, welche eine gemeinschaftliche Kante (DE) und die vier Seiten und zwei Diagonalen eines, im Allgemeinen nicht in einer Ebene liegenden, Vierecks (ABCF) zu den, der gemeinschaftlichen Kante gegenüberstehenden, Kanten haben, ist die Summe der zwei Producte aus den Pyramiden über den gegenüberliegenden Seiten des Vierecks gleich dem Producte aus den Pyramiden über den Diagonalen; — ein Satz, der dem in §. 166. Zus. für Dreiecke aufgestellten, wie man sieht, völlig analog ist.

§. 171. Eine zweite Relation dieser Art ergiebt sich, wenn man aus den obigen Ausdrücken für E, F und G zwei F.punkte immer zugleich eliminirt. Es lässt sich aber diese Rechnung durch dasselbe Mittel, dessen wir uns in §. 50. *a*. in einem ganz ähnlichen Falle bedienten, sehr vereinfachen. Sind nämlich v und w zwei von einander unabhängige Veränderliche, und haben p, q, r, s, α, β, γ, δ dieselbe Bedeutung, wie dort, dass also auch:

$$\alpha p+\beta q+\gamma r+\delta s=0$$

ist, so kommt, wenn man die Ausdrücke für E, F, G resp. mit 1, v, w multiplicirt und hierauf addirt:

$$pA+qB+rC+sD=eE+vfF+wgG.$$

Bestimmt man nun v und w erstlich so, dass p und q zugleich $=0$ werden, so erhält man:

$$\gamma r+\delta s=0,\ rC+sD-eE-vfF-wgG=0;$$

folglich $\delta : -\gamma = r : s = DEFG : EFGC$,
oder $CEFG : DEFG = \gamma : \delta$.

Lässt man auf gleiche Weise q und r, und hierauf r und s zugleich $=$o werden, so findet sich, Alles zusammengenommen:

$$AEFG : BEFG : CEFG : DEFG = \alpha : \beta : \gamma : \delta.$$

Sodann verhält sich vermöge des Ausdrucks für G:

$$BCDG : -CDAG : DABG : -ABCG = a'' : b'' : c'' : d''.$$

Es war aber nach §. 50.: $\alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' + \delta d'' = 0$, folglich:

$$\text{II.} \quad AEFG.BCDG - BEFG.CDAG + CEFG.DABG - DEFG.ABCG = 0,$$

eine Relation zwischen acht Pyramiden bei einem Systeme von sieben Punkten im Raume. — Die vier Pyramiden, welche in jedem der vier Producte zuerst stehen, haben das Dreieck EFG zur gemeinschaftlichen Grundfläche und die Punkte A, B, C, D der Reihe nach zu Spitzen. Von den vier andern Pyramiden sind die Seiten der Pyramide $ABCD$ die Grundflächen und G die gemeinschaftliche Spitze.

Nimmt man an, dass die sechs Punkte $A, \ldots F$ in einer Ebene liegen, so sind die Pyramiden ihren in diese Ebene fallenden Seiten proportional. Bei einem Systeme von sechs Punkten in einer Ebene muss folglich seyn:

$$AEF.BCD - BEF.CDA + CEF.DAB - DEF.ABC = 0,$$

eine Relation zwischen acht Dreiecken, zu der man auch unmittelbar gekommen seyn würde, hätte man in den obigen Gleichungen für G, Null gesetzt.

Von der Affinität und Gleichheit krummer Linien und Flächen.

§. 172. Da in diesem sowohl, als dem vorigen Capitel nur Systeme von geraden Linien und Ebenen betrachtet worden sind, so bleibt noch übrig, auch über Curven und krumme Flächen, insofern sie in den jetzt erörterten Beziehungen zu einander stehen, Einiges hinzuzufügen.

Einer Curve in einer Ebene, $pA+qB+rC$, ist eine andere, $pA'+qB'+rC'$, affin, wenn in beider Ausdrüken die Coëfficienten p, q, r dieselben Functionen einer Veränderlichen bedeuten. Haben überdies die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gleichen Inhalt, so sind die Curven einander gleich. Giebt man der Veränderlichen in beiden Ausdrücken einen und denselben Werth, so erhält man sich entsprechende Punkte der Curven. Auch werden die an entsprechende Punkte der Curven gezogenen Tangenten sich entsprechende Gerade seyn (§. 153. *a.*). Je zwei in oder um die affinen Curven beschriebene Vielecke, deren Spitzen oder Berührungspunkte sich entsprechende Punkte in derselben Folge sind, stehen mithin in dem Verhältnisse der Dreiecke $ABC:A'B'C'$. Da ferner jeder Bogen als zusammengesetzt aus unendlich vielen und unendlich kleinen Geraden angesehen werden kann, so werden auch die von sich entsprechenden Sehnen abgeschnittenen Segmente, so wie die Flächen, welche von sich entsprechenden Bögen und den an die Endpunkte derselben gelegten Tangenten begrenzt werden, folglich auch die von den Curven selbst eingeschlossenen Flächen, wenn anders die Curven in sich zurücklaufen, sich wie $ABC:A'B'C'$ verhalten, also bei gleichen Curven einander gleich seyn.

§. 173. Sind zwei affine Curven gegeben, so ist in der Regel mit jedem Punkte der einen Linie auch der entsprechende Punkt in der andern gegeben. Eine Ausnahme hiervon machen die Kegelschnitte, wo das erste Paar sich entsprechender Punkte nach Belieben gewählt werden kann.

Man habe z. B. zwei Ellipsen. Nimmt man in jeder derselben zwei zusammengehörige Halbmesser CA und CB, $C'A'$ und $C'B'$ zu den F.seiten, so sind die Ausdrücke dieser Curven: $2\nu A + (1-\nu^2)B - 2\nu(1-\nu)C$ und $2\nu A' + (1-\nu^2)B' - 2\nu(1-\nu)C'$ (§. 130. 4.). Je zwei Ellipsen sind folglich einander affin, können aber, weil A' durch A nicht bestimmt wird, sondern der Willkühr überlassen bleibt, auf unzählige Weisen als affine Figuren mit einander verglichen werden. Dabei verhalten sich je zwei einander entsprechende Flächentheile, folglich auch die ganzen Ellipsenflächen, wie die Dreiecke ABC und $A'B'C'$. Diese Dreiecke müssen folglich zu den Ellipsenflächen selbst in einem constanten Verhältnisse stehen, wie auch die zusammengehörigen Halbmesser genommen werden mögen; folglich in constantem Verhältnisse auch die Vierfachen dieser Dreiecke; welches den bekannten Satz giebt, *dass in einer Ellipse alle Parallelogramme, deren Diagonalen zwei zusammengehörige Durchmesser sind, gleiche Grösse haben.*

Sind die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ einander gleich, so sind es auch die Ellipsen und begrenzen gleiche Flächen; und umgekehrt ist jede einer Ellipse gleiche Figur eine Ellipse, welche mit der erstern gleichen Inhalt hat.

Auf eben die Art folgt aus dem von unbestimmten Constanten freien Ausdrucke für die Hyperbel: $-2\nu A + (1+\nu^2)B + 2\nu(1-\nu)C$ (§. 134. 2.), wobei CB ein

reeller und CA der zugehörige imaginäre Halbmesser ist, dass je zwei Hyperbeln auf unendlich viele Weisen als einander affine Figuren sich betrachten lassen, und dass jede einer Hyperbel affine oder gleiche Figur ebenfalls eine Hyperbel ist.

Dasselbe wird endlich auch für die Parabel gelten. Aber noch mehr: bei zwei Parabeln kann nicht nnr das erste, sondern auch das zweite Paar sich entsprechender Punkte nach Willkühr genommen werden. Denn seyen A und C irgend zwei Punkte der einen Parabel. Man ziehe an dieselbe in A und C zwei Tangenten, welche sich in B schneiden, so ist, A, B, C zu F.punkten genommen, der Ausdruck der Curve, als eines Kegelschnitts, welcher in A und C von AB und CB berührt wird: $\alpha A + \nu B + \nu^2 C$ (§. 64. 3.). Weil aber bei der Parabel die Summe der Coëfficienten ein Quadrat ist, so muss $\alpha = \frac{1}{4}$ seyn, und folglich der Ausdruck: $\frac{1}{4}A + \nu B + \nu^2 C$. — Auf gleiche Art seyen A' und C' zwei beliebige Punkte der andern Parabel und B' der Durchschnitt der zwei in diesen Punkten an die Curve gezogenen Tangenten, so ist $\frac{1}{4}A' + \nu B' + \nu^2 C'$ der Ausdruck dieser zweiten Parabel. Lässt man nun A' dem A und C' dem C entsprechen, so geben die beiden Ausdrücke alle andern Paare sich entsprechender Punkte, und je zwei sich entsprechende Flächentheile werden sich wie ABC zu $A'B'C'$ verhalten.

Statt dass also bei zwei Ellipsen oder Hyperbeln mit diesen Curven selbst auch das Verhältniss ihrer sich entsprechenden Flächentheile gegeben ist, bleibt hier dieses Verhältniss durchaus unbestimmt, indem mit der verschiedenen Annahme der ganz beliebig zu wählenden Punkte A' und C' auch das Verhältniss der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sich ändert. Je zwei Parabeln lassen

sich daher auch als einander gleiche Figuren betrachten, wenn man nur, was auf unzählige Weisen möglich ist, die Punkte A' und C' so bestimmt, dass jene Dreiecke gleichen Inhalt bekommen.

§. 174. Es lassen sich aus dieser Eigenthümlichkeit der Parabeln mehrere sehr merkwürdige Folgerungen ableiten.

1) Ist $ABC = A'B'C'$ (Fig. 39.), so sind auch die parabolischen Segmente über AC und $A'C'$ einander gleich. Jedes parabolische Segment muss folglich zu dem Dreiecke, welches von der Sehne und den an die Endpunkte derselben gelegten Tangenten gebildet wird, in einem constanten Verhältnisse $1:m$ stehen.

2) Unter derselben Annahme, dass $ABC = A'B'C'$ ist, seyen E und E' zwei zwischen AC und $A'C'$ in den Parabeln so genommene Punkte, dass die Segmente über AE und $A'E'$ einander gleich sind, so sind E und E' sich entsprechende Punkte, und folglich auch die Segmente über EC und $E'C'$ einander gleich. Zwischen den drei Segmenten über den Seiten AC, AE, EC eines in eine Parabel beschriebenen Dreiecks muss folglich eine Gleichung obwalten, so dass aus zweien derselben ohne weiteres das dritte gefunden werden kann.

Man lege an E eine Tangente, welche AB und BC in F und G schneide, so ist, wenn wir das Segment über AC mit (AC), etc. bezeichnen: $m(AC) = ABC$, $m(AE) = AFE$, $m(EC) = EGC$. Dieselbe Gleichung, welche zwischen den drei Segmenten obwaltet, muss folglich auch zwischen diesen, den Segmenten proportionalen, Dreiecken bestehen. Wir werden in der Folge sehen, dass $ABC^{\frac{1}{3}} = AFE^{\frac{1}{3}} + EGC^{\frac{1}{3}}$; mithin wird auch seyn:

$$\text{I.}\quad (AC)^{\frac{1}{3}} = (AE)^{\frac{1}{3}} + (EC)^{\frac{1}{3}}, \text{ d. h.}$$

Bei einem in eine Parabel beschriebenen Dreiecke ist die Kubikwurzel aus dem grössten der über den Seiten liegenden Segmente der Summe der Kubikwurzeln aus den beiden andern Segmenten gleich.

3) Kubirt man die Gleichung I., so kommt:

$$(AC) = (AE) + (EC) + 3(AE)^{\frac{1}{3}}(EC)^{\frac{1}{3}}[(AE)^{\frac{1}{3}} + (EC)^{\frac{1}{3}}]$$

$$= (AE) + (EC) + 3(AE)^{\frac{1}{3}}(EC)^{\frac{1}{3}}(AC)^{\frac{1}{3}},\quad (AC) - (AE) - (EC) =$$

$$\text{II.}\quad AEC = 3(AE)^{\frac{1}{3}}(EC)^{\frac{1}{3}}(AC)^{\frac{1}{3}},\ \text{d. h.}$$

Ein in eine Parabel beschriebenes Dreieck ist gleich dem dreifachen Producte der Kubikwurzeln aus den Segmenten über den drei Seiten.

4) In dem speciellen Falle, wo FG mit AC parallel geht, ist E der Mittelpunkt von FG *), und als der der Doppelordinate AC zugehörige Scheitel zu betrachten. Alsdann sind die Dreiecke AFE und EGC, mithin auch die Segmente (AE) und (EC) einander gleich, und die Gleichung I. wird: $(AC)^{\frac{1}{3}} = 2(AE)^{\frac{1}{3}}$, woraus weiter $(AC) = 8(AE)$, $(AC) - 2(AE) = 6(AE)$, d. i. $AEC = \frac{3}{4}(AC)$ folgt, also:

*) Der Beweis hiervon lässt sich mittelst des barycentrischen Calculs so führen. — Sey für den Punkt E, $v = v'$, also $E \equiv \frac{1}{4}A + v'B + v'^2 C$. Die an E gelegte Tangente hat den Ausdruck:

$$\tfrac{1}{4}A + (v' + x)B + (v'^2 + 2v'x)C,$$

und schneidet folglich die F.linien in den Punkten:

$$\tfrac{1}{4}A - v'^2 C,\quad \tfrac{1}{4}A + \tfrac{1}{2}v'B \equiv F,\quad B + 2v'C \equiv G.$$
$$\text{für}\quad x = -v',\qquad = -\tfrac{1}{2}v',\qquad = \infty.$$

Läuft nun die Tangente mit AC parallel, so ist der erste dieser drei Punkte unendlich entfernt, also $v' = \frac{1}{2}$, wodurch $2F = A + B$ und $2G = B + C$ wird, folglich AB und BC in F und G halbirt werden.

Endlich wird für $v' = \frac{1}{2}$, $E \equiv \frac{1}{4}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{4}C \equiv (A + B) + (B + C) \equiv F + G$, also B der Mittelpunkt von FG.

E

Ein in eine Parabel beschriebenes Dreieck, dessen Spitze der der Grundlinie, als Doppelordinate, zugehörige Scheitel ist, verhält sich zu dem Parabelsegment über der Grundlinie, wie drei zu vier.

(Archimedes Quadratur der Parabel, 17. und 24. Satz.)

5) Unter derselben Voraussetzung, dass FG mit AC parallel läuft, ist F der Mittelpunkt von AB, so wie G von BC, folglich $\frac{3}{4}(AC) = AEC = AFC = \frac{1}{2}ABC$, also

$$\text{III.} \quad (AC) = \tfrac{2}{3}ABC, \text{ d. h.}$$

Ein Parabelsegment ist zwei Dritteln des Dreiecks gleich, welches von der Sehne des Segments und den an die Endpunkte der Sehne gelegten Tangenten begrenzt wird.

Es ist demnach das obige $m = \frac{3}{2}$.

6) Sey E wiederum ein beliebiger Punkt der Parabel zwischen A und C. Man multiplicire die Gleichung

$$AEC = (AC) - (AE) - (EC)$$

mit $m = \frac{3}{2}$, so kommt:

$$\tfrac{3}{2}AEC = ABC - AFE - EGC = AEC + FBG,$$

folglich

$$\text{IV.} \quad AEC = 2FBG, \text{ d. h.}$$

Ein in eine Parabel beschriebenes Dreieck ist dem Doppelten des umschriebenen Dreiecks gleich, dessen Seiten die Parabel in den Spitzen des erstern Dreiecks berühren.

Es wird dieser Satz in der Folge noch auf eine andere, von dem Vorigen unabhängige, Weise bewiesen werden, woraus sich dann umgekehrt der Werth des constanten m und somit ebenfalls die Quadratur der Parabel finden lässt.

Anmerkung. Da ein unendlich kleiner Bogen einer jeden Curve immer als ein Stück einer Parabel angesehen werden kann, so wer-

den die Sätze 2) bis 6) auch für alle andern Curven gelten, sobald man die Punkte A, E, C einander unendlich nahe nimmt. So wird z. B. jedes unendlich kleine Segment einer Curve zwei Drittel des Dreiecks seyn, welches die Sehne und die an die Endpunkte derselben gezogenen Tangenten zu Seiten hat. Auch wird der Durchschnittspunkt dieser Tangenten noch einmal so weit, als der Mittelpunkt des unendlich kleinen Bogens, von der Sehne entfernt seyn.

§. 175. Einer krummen Fläche $pA + qB + rC + sD$ ist eine andere affin, wenn sich der Ausdruck der letztern auf die Form $pA' + .. sD'$ bringen lässt, so dass p, q, r, s in beiden Ausdrücken die nämlichen Functionen zweier Veränderlichen sind. Sich entsprechende Punkte beider Flächen sind diejenigen, für welche die zwei Veränderlichen in dem einem Ausdrucke dieselben bestimmten Werthe, wie in dem andern, haben. Berührende Ebenen an sich entsprechende Punkte gelegt entsprechen einander gleichfalls. Setzt man in beiden Ausdrücken zwischen den zwei Veränderlichen eine und dieselbe Relation fest, so bekommt man die Ausdrücke zweier in den Flächen liegenden und sich entsprechenden Linien. Ist die eine derselben eine Gerade, so ist es auch die andere; etc. Je zwei sich entsprechende Theile des Raums, d. h. solche, die von sich entsprechenden Ebenen gebildet werden, oder auch sich entsprechende Theile der Flächen selbst zu Grenzen haben, stehen in dem Verhältnisse der Pyramiden $ABCD$ und $A'B'C'D'$ zu einander. Haben letztere gleichen Inhalt, so heissen die Flächen einander gleich.

§. 176. Nimmt man bei einem hyperbolischen Hyperboloid den Mittelpunkt und die Endpunkte drei zusammengehöriger Halbmesser zu den vier F.punkten, so ist der Ausdruck dieser Fläche der in §. 134. 2. gefundene: $(1 - vw)A + \ldots$. Da hierin keine unbestimmten Constanten vorkommen, so schliessen wir, dass nicht

nur jede einem hyp. Hyperboloid affine oder gleiche Fläche wiederum ein hyp. Hyperboloid, sondern auch je zwei hyp. Hyperboloide einander affin sind und auf unendlich viele Weisen sich als solche betrachten lassen, weil das erste Paar sich entsprechender Halbmesser DA und $D'A'$ nach Belieben genommen werden kann. — Das Nämliche wird auch von den elliptischen Hyperboloiden und den Ellipsoiden gelten. Uebrigens ist bei jeder dieser drei Flächen die Pyramide, welche drei zusammengehörige Halbmesser zu anliegenden Kanten hat, von constanter Grösse, woraus zu schliessen, dass, wie auch das erste Paar sich entsprechender Punkte genommen werden mag, das constante Verhältniss zwischen sich entsprechenden Raumtheilen sich dadurch nicht ändert. Bei dem Ellipsoid erhellet dies auf ähnliche Weise, wie oben bei der Ellipse.

So wie aber die Parabel, so besitzen auch das elliptische und das hyperbolische Paraboloid die merkwürdige Eigenschaft, dass das constante Verhältniss zwischen sich entsprechenden Räumen nach Willkühr bestimmt werden kann.

§. 177. Seyen, um dieses zuerst für das hyp. Paraboloid darzuthun, A und D (Fig. 40.) irgend zwei Punkte einer solchen Fläche. Durch jeden derselben lassen sich zwei in der Fläche selbst enthaltene gerade Linien legen. Dabei wird die eine Linie des durch A gehenden Linienpaars von der einen und die andere von der andern Linie des Linienpaars durch D geschnitten. Heissen diese zwei Durchschnitte B und C, so ist $A+xB+yC+xyD$ der Ausdruck der Fläche *). Auf gleiche Art seyen A'

*) Dass dieser in §. 112. erhaltene Ausdruck der eben angenommenen Lage der F.punkte Genüge leiste, ist leicht zu erkennen. Dass aber, um den Ausdruck auf diese einfache Form zu bringen, nur

und D' zwei beliebige Punkte eines andern hyp. Paraboloids, und B' und C' die Punkte, in denen die durch A' und D' gehenden, in der Fläche selbst begriffenen Geraden sich schneiden, also $A' + xB' + yC' + xyD'$ der Ausdruck dieses zweiten Paraboloids. Setzt man nun A', B', C', D' den A, B, C, D entsprechend, so sind dieser Ausdruck und der vorige die Ausdrücke zweier affinen Flächen. Das Verhältniss aber, in welchem je zwei sich entsprechende Raumtheile stehen, ist $= ABCD : A'B'C'D'$ und kann jedes beliebige seyn, weil nach der verschiedenen Annahme der Punkte A' und D' die Pyramide $A'B'C'D'$ jede beliebige Grösse erreichen kann.

§. 178. Folgerungen. Man nehme in AB einen beliebigen Punkt E und in $A'B'$ einen Punkt E', so dass $A'B' : B'E' = AB : BE$, so sind E und E' sich entsprechende Punkte. Die durch E und E' in den Flächen

jene Annahme der F.punkte und keine andern Bedingungen weiter erforderlich sind, lässt sich folgendergestalt übersehen. — Für irgend eine nach einem gewissen Gesetz auf einer Fläche gezogene Linie besteht zwischen den Veränderlichen im Ausdrucke der Fläche eine gewisse Relation: $f(v, w) = 0$. Soll also z. B. die F.linie AB in der Fläche liegen, so müssen für $f(v, w) = 0$ die Coëfficienten von C und D null werden, d. h. es müssen diese Coëfficienten einen gemeinschaftlichen Factor haben. Hiernach ist der allgemeine Ausdruck einer Fläche, in welcher die vier F.linien AB, AC, BD, CD zugleich enthalten sind:

$$apqA + bprB + cqsC + drsD,$$

wo p, q, r, s beliebige Functionen von v und w, und a, b, c, d entweder gleichfalls solche Functionen, oder auch Constanten sind. Es wird aber dieser Ausdruck, wenn man ihn mit apq dividirt und hierauf $\frac{br}{aq} = x$, $\frac{cs}{ap} = y$, $\frac{ad}{bc} = \delta$ setzt:

$$A + xB + yC + \delta xyD.$$

Soll nun diese Fläche die zweite Ordnung nicht übersteigen, so muss δ constant seyn. Alsdann ist die Fläche ein hyp. Hyperboloid, und nur für $\delta = 1$ ein hyp. Paraboloid.

selbst gezogenen Geraden EF und $E'F'$ werden sich daher gleichfalls entsprechen, so wie auch die Punkte F und F', in denen diese Linien von CD und $C'D'$ geschnitten werden, und es wird sich verhalten $C'D':D'F' = CD:DF$.

Mit dem Verhältniss $AB:BE$ muss daher das Verhältniss $CD:DF$ und das Verhältniss der Pyramiden $ABCD:BEDF$ gegeben seyn, und aus je zweien der drei Pyramiden $ABCD$, $BEDF$, $AECF$ muss sich die dritte finden lassen. Endlich wird jede dieser Pyramiden von der krummen Fläche selbst nach einem constanten Verhältnisse getheilt werden. — Wir wollen nunmehr diese Relationen zu bestimmen suchen.

1) Sey $E \equiv A + bB$, so ist der Ausdruck der Geraden $EF: A + bB + yC + byD$ (§. 112.), und daher F, als der Durchschnitt dieser Geraden mit CD, $\equiv C + bD$, folglich

$$\text{I.} \quad AB:BE = CD:DF, \text{ d. h.}$$

Bei dem hyperbolischen Paraboloid werden alle Geraden des einen Systems von den Geraden des andern Systems nach einerlei Verhältnissen geschnitten.

2) Es verhalten sich die Pyramiden

$$ABCD:BECD = AB:BE \quad (\text{§. 20. } b.)$$

$$BECD:BEDF = CD:DF = AB:BE$$

folglich $\quad$ II. $\quad ABCD:BEDF = AB^2:BE^2$.

3) Auf gleiche Art verhält sich:

$$ABCD:AECF = AB^2:AE^2,$$

woraus, wenn B zwischen A und E liegt, in Verbindung mit II. folgt:

$$\text{III.} \quad ABCD^{\frac{1}{2}} + BEDF^{\frac{1}{2}} = AECF^{\frac{1}{2}}, \text{ d. i.}$$

Wird auf der Fläche eines hyp. Paraboloids ein geradliniges Viereck beschrieben, und dieses durch eine fünfte in der Fläche gezogene Gerade in zwei andere Vierecke zerlegt, so ist die Quadratwurzel aus der Pyramide, welche mit dem erstern Vierecke einerlei Spitzen hat, gleich der Summe der Quadratwurzeln aus den zwei Pyramiden, welche mit den zwei letztern Vierecken die Spitzen gemein haben.

Man bemerke hierbei noch, dass eine solche Pyramide, wie $ABCD$, eine einbeschriebene und umschriebene zugleich genannt werden kann; eine einbeschriebene, weil ihre vier Spitzen in der Fläche des Paraboloids liegen; eine umschriebene, weil ihre vier Seiten die Fläche berühren, die Seite CAB in der Spitze A, ABD in B, etc. (§. 111.)

4) Der Theil der paraboloidischen Fläche, welcher von den Seiten des Vierecks $ABDC$ begrenzt wird, liegt innerhalb der Pyramide $ABCD$ und theilt dieselbe in zwei Theile, von denen der eine von der Fläche $ABDC$ und von den Dreiecken ABC und BCD, d. i. von den die Fläche in A und D berührenden Ebenen; der andere von derselben viereckigen Fläche und von den Dreiecken ABD und ACD, d. i. von den an B und C gelegten Berührungsebenen begrenzt wird. Werde daher der erstere Theil mit $[AD]$ und der letztere mit $[BC]$ bezeichnet. Diese beiden Theile müssen in einem constanten Verhältnisse, $1:m$, zu einander stehen, so dass $[AD]:[BC] = 1:m$.

Man setze nun in dem Ausdrucke der Fläche

$$A + xB + yC + xyD,$$

$\frac{1}{z}$ statt y, so verwandelt sich der Ausdruck in

$$C + xD + zA + xzB;$$

Das vorige constante Verhältniss wird daher auch statt finden, wenn man C mit A, und D mit B gegenseitig vertauscht. Hierdurch aber geht $[AD]$ in $[BC]$, und umgekehrt, über; folglich muss sich auch verhalten: $[BC]:[AD]=1:m$ und daher

$$\text{IV.}\quad [AD]=[BC]=\tfrac{1}{2}ABCD \text{ seyn, d. h.}$$

Construirt man auf der Fläche eines hyperbolischen Paraboloids ein geradliniges Viereck, so wird die Pyramide, deren Spitzen die Spitzen des Vierecks sind, von der Fläche halbirt.

5) Wenn, ähnlicherweise wie die Bezeichnungen $[AD]$ und $[BC]$ gebraucht wurden, $[BF]$ den Raum vorstellt, welcher die krumme Fläche und die an B und F gelegten berührenden Ebenen zu Grenzen hat; etc. so giebt die eben erhaltene höchst einfache Cubatur, mit der Gleichung III. in Verbindung gesetzt, folgende Relation:

$$\text{V.}\quad [AD]^{\frac{1}{2}}+[BF]^{\frac{1}{2}}=[AF]^{\frac{1}{2}},$$

wo die vier Punkte des Paraboloids, A, B, D, F, dergestalt liegen, dass die drei Geraden AB, BD, DF in der Fläche selbst enthalten sind, und A und F auf entgegengesetzten Seiten von BD sich befinden; — die analoge Relation von §. 174. I. bei der Parabel.

6) Nach 2) ist $BECD$, und eben so auch $ABDF$, die mittlere Proportionalgrösse zwischen $ABCD$ und $BEDF$; folglich mit Zuziehung von IV.:

$$\text{VI.}\quad ABDF=BECD=2[AD]^{\frac{1}{2}}[BF]^{\frac{1}{2}}=2[BC]^{\frac{1}{2}}[ED]^{\frac{1}{2}},$$

analog mit §. 174. II.

§. 179. Es ist jetzt noch das elliptische Paraboloid in Untersuchung zu nehmen übrig, von welchem wir aber zuvor einen zu dieser Absicht passenden Ausdruck

entwickeln müssen. — Jede Fläche der zweiten Ordnung hat die bekannte Eigenschaft, dass sie von einer Ebene immer in einem Kegelschnitte, K, geschnitten wird, und dass, wenn man an dieser Curve eine zweite Ebene, die Fläche berührend, fortbewegt, alle Lagen dieser bewegten Ebene durch einen gemeinschaftlichen Punkt D gehen, welcher Punkt daher als die Spitze eines die Fläche einhüllenden und sie in K berührenden Kegels erscheint. Seyen nun A, B, C (Fig. 41.) irgend drei Punkte des Kegelschnitts, so ist sein Ausdruck

$$(K) \quad a(1-v)A+bvB-(1-v)vC,$$

auf welchen sich, wie wir in der Folge sehen werden, der in §. 64. 1. für diesen Fall gefundene Ausdruck immer reduciren lässt. Werde ferner durch D, C und irgend einen andern Punkt, $pP=a(1-v)A+bvB-..$, der Curve K eine Ebene gelegt, so wird diese Ebene jenen Kegel in den Geraden DC und DP, die Fläche selbst aber in einem Kegelschnitte schneiden, welcher in C und P von DC und DP berührt wird, und dessen Ausdruck daher von der Form $\varphi P+xD+x^2C$ oder $pP+wD+\psi w^2C$ ist (§. 64. 3.), wo φ oder $\psi=\frac{\varphi}{p}$ eine noch zu bestimmende Function von v bedeutet. Zugleich aber stellt dieser Ausdruck die Fläche selbst dar, wenn man nebst w noch v und somit auch den Punkt P veränderlich nimmt. Substituirt man demnach für pP den obigen Werth, so kommt der Ausdruck der Fläche:

$$(F) \quad a(1-v)A+bvB+(v^2+cw^2-v)C+wD,$$

wo A, B, C Punkte der Fläche selbst sind, und D der Durchschnitt der drei in diesen Punkten an die Fläche berührend gelegten Ebenen ist. Hierbei ist noch c statt ψ geschrieben. Denn es lässt sich leicht zeigen, dass ψ

eine von v unabhängige Constante seyn muss. In der That, setzt man in (F) den Coëfficienten von C null, und eliminirt damit w aus dem Coëfficienten von D, so kommt:

$$a(1-v)A+bvB+\sqrt{\frac{v-v^2}{\psi}}\,D,$$

oder $$aA+by^2B+\frac{1}{\sqrt{\psi}}\cdot yD,\quad \text{wo}\quad y=\sqrt{\frac{v}{1-v}},$$

als der Durchschnitt der Fläche mit der Ebene ABD. Dieser Schnitt muss aber ein Kegelschnitt seyn, welcher von AD und BD in A und D berührt wird; und hiermit stimmt sein Ausdruck nur dann überein, wenn ψ eine von y, und folglich auch von v unabhängige Grösse ist.

Soll nun die Fläche ein elliptisches Paraboloid seyn, so muss in (F) die Summe der Coëfficienten

$$=v^2-(1+a-b)v+cw^2+w+a$$

$$=[v-\tfrac{1}{2}(1+a-b)]^2+\frac{1}{4c}[2cw+1]^2-\frac{1}{4}(1+a-b)^2-\frac{1}{4c}+a$$

die Summe zweier Quadrate ausmachen (§. 110.), also c positiv und $=\dfrac{1}{4a-(1+a-b)^2}$ seyn. Auch giebt die hieraus fliessende Bedingung, $4a>(1+a-b)^2$, noch zu erkennen, dass der Kegelschnitt K dann eine Ellipse ist. —

Man denke sich nun ein zweites elliptisches Paraboloid. Der Schnitt desselben mit einer beliebig gelegten Ebene, im Allgemeinen eine Ellipse, heisse K', und werde mit der vorigen Ellipse K, als einer affinen Curve, in Vergleichung gebracht. Zu dem Ende nehme man in K' einen beliebigen Punkt A', den man dem Punkte A in K entsprechend setze; man bestimme ferner in K' ei-

nen andern Punkt B' so, dass die Ellipsenfläche K' von der Sehne $A'B'$ in demselben Verhältniss, als die Ellipsenfläche K von der Sehne AB getheilt wird; so ist B' der dem B entsprechende Punkt. Auf gleiche Art wird auch der Punkt C' gefunden, welcher dem C entspricht, nur dass C' in dem grössern oder kleinern der zwei durch die Sehne $A'B'$ entstehenden Segmente genommen werden muss, nachdem das eine oder das andere bei C hinsichtlich der Sehne AB der Fall ist *). Weil also A, B, C und A', B', C' in den affinen Curven K und K' sich entsprechende Punkte sind, so wird man aus dem Ausdrucke von K sogleich den von K' erhalten, wenn man nur die F.punkte A mit A', etc. vertauscht, also:

$$(K') \quad a(1-\nu)A' + b\nu B' - (1-\nu)\nu C',$$

wo a und b dieselben Werthe wie in (K) haben.

Man lege endlich an das zweite Paraboloid in A', B', C' drei berührende Ebenen, welche sich in D' schneiden, so ist nach dem vorhin Erwiesenen:

$$(F') \quad a(1-\nu)A' + b\nu B' + (\nu^2 + cw^2 - \nu)C' + wD'$$

der Ausdruck der Fläche, wo, wegen der Natur des ellipt. Paraboloids, c positiv seyn und eben so wie in (F) von a und b abhängen muss.

Setzt man also noch D' dem D entsprechend, so sind in dieser Beziehung die beiden Flächen einander affin. Da nun hierbei zwei sich entsprechende Raumtheile die durch die Ebenen der Ellipsen K und K' abgeschnittenen paraboloidischen Segmente sind, jedes die-

*) Beigehends werde bemerkt, dass hiernach folgende Aufgabe zu lösen möglich seyn muss: *Die drei Segmente über den Seiten eines in eine Ellipse beschriebenen Dreiecks sind ihrem Inhalte nach gegeben. Hieraus den Inhalt der ganzen Ellipse zu finden.*

ser Segmente aber, wegen der durch Nichts bestimmten Lage der Ebenen, von jeder beliebigen Grösse seyn kann, so lässt sich auch hier das constante Verhältniss je zwei sich entsprechender Raumtheile nach Willkühr annehmen.

Eine unmittelbare Folge hiervon ist, dass das Segment über der Ellipsenfläche *K* zu dem vorhin gedachten Kegel, dessen Basis ebenfalls *K* und dessen Spitze *D* war, in einem constanten Verhältnisse steht. Ist das Paraboloid eine durch Umdrehung erzeugte Fläche, und die Ebene von *K* senkrecht auf der Umdrehungsaxe, so ist *K* ein Kreis, und, wie man alsdann sehr leicht durch Integralrechnung findet, beträgt das Segment drei Viertel des Kegels. Dasselbe Verhältniss muss daher auch in jedem andern Falle statt finden; also überhaupt:

Das Segment eines elliptischen Paraboloids ist drei Vierteln des Kegels gleich, welcher mit dem Segmente einerlei Basis hat, und dessen Spitze der gemeinschaftliche Durchschnitt der Ebenen ist, welche das Paraboloid in der Peripherie des Segments berühren.

Anmerkung. Alle krummen Flächen theilen sich, mit Ausnahme der abwickelbaren, in zwei grosse Classen. Die Flächen der einen Classe haben mit einer daran gelegten Berührungsebene nur den Berührungspunkt gemein; die Flächen der andern Classe werden von der Berührungsebene in zwei durch den Berührungspunkt gehenden Linien geschnitten (§. 107.). Jedes Element einer Fläche der erstern Classe wird sich als das Element eines elliptischen, und jedes Element einer der letztern Classe zugehörigen Fläche als das Element eines hyperbolischen Paraboloids betrachten lassen. Die einfachen Eigenschaften, welche in diesem §. von dem elliptischen und in §. 178. von dem hyperbolischen Paraboloid bewiesen worden sind, werden daher auf unendlich kleine Theile auch jeder andern krummen Fläche der einen und andern Classe Anwendung leiden. Vergl. Anmerk. zu §. 174.

Fünftes Capitel.

Die Doppelschnittsverhältnisse.

§. 180. Ausser den bisher erörterten vier Verwandtschaften zwischen Figuren soll in diesem Abschnitte die Theorie noch einer fünften Verwandtschaft dargestellt werden. Zum bessern Verständniss derselben halte ich es aber für dienlich, in diesem und dem folgenden Capitel einige Lehren, als Vorbereitung, vorauszuschicken. Insbesondere wird bei der fünften Verwandtschaft eine eigene Art zusammengesetzter Verhältnisse eine wichtige Rolle spielen. Die Eigenschaften dieser Verhältnisse und der mit denselben anzustellende Algorithmus werden den Inhalt des gegenwärtigen Capitels ausmachen, das, wie ich noch bemerke, auch als eine für sich bestehende Abhandlung betrachtet werden kann, indem der in den übrigen Theil dieser Schrift verwebte barycentrische Calcul hier ganz ausgeschlossen bleibt.

§. 181. Unter dem Verhältnisse, nach welchem eine durch ihre Grenzpunkte A und B bestimmte gerade Linie AB in irgend einem dritten, innerhalb oder ausserhalb der Grenzpunkte liegenden Punkte C geschnitten wird, verstehe man das Verhältniss zwischen dem Theile AC, welcher sich von dem im Ausdrucke der Linie zuerst gesetzten Punkte oder dem Anfangspunkte A bis zum Schneidepunkte C erstreckt, und dem Theile CB vom Schneidepunkte C bis zum andern Grenzpunkte oder Endpunkte B.

Dieses Verhältniss, $AC:CB$, kann nach der verschiedenen Lage des Schneidepunktes gegen die beiden Grenzpunkte alle möglichen Werthe haben.

Liegt C zwischen A und B, ist also

$$ACB$$

die Aufeinanderfolge der Punkte, so ist der Werth des Verhältnisses $AC:CB$, den ich $=c$ setzen will, positiv, und zwar desto kleiner oder grösser, je näher C dem A oder B liegt. Ist C der Mittelpunkt von AB, so wird $c=1$.

Fällt C ausserhalb A und B, so ist c negativ, und zwar, wenn C auf die Seite von A fällt, also bei der Folge

$$CAB,$$

absolut kleiner als 1, und desto kleiner, je näher C dem A liegt. — Kommt C ausserhalb AB auf die Seite von B zu liegen, wird also

$$ABC$$

die Folge der Punkte, so wird c absolut grösser als 1, und desto grösser, je näher C dem B rückt.

In den speciellen Fällen endlich, wo C unendlich entfernt liegt, oder mit A, oder mit B zusammenfällt, wird $c=-1$, oder 0, oder ∞.

§. 182. Ein Doppelschnittsverhältniss (*ratio bissectionalis*) ist das Verhältniss zwischen den zwei Verhältnissen, nach welchen eine gerade Linie, in Bezug auf zwei in ihr liegende Punkte, als Grenzpunkte, in zwei andern Punkten geschnitten wird.

Ist also, wie vorhin, A der Anfangspunkt der Linie, B ihr Endpunkt, und C der eine, D der andere Schneidepunkt, so ist das Verhältniss zwischen den Verhältnissen $AC:CB$ und $AD:DB$, oder

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$$

das D.verhältniss, nach welchem AB in C und D geschnitten wird.

Man setze die Verhältnisse $AC:CB=c$, $AD:DB=d$, und das D.verhältniss $c:d=\Delta$. Liegen nun C und D zugleich zwischen A und B, so sind (vor. §.) c und d positiv, und $c<d$ oder $c>d$, nachdem C oder D der dem A nähere Punkt ist; folglich Δ positiv und im erstern Falle, also bei der Folge $ACDB$, kleiner als 1; im letztern Falle, also bei der Folge $ADCB$, grösser als 1.

Verfährt man auf ähnliche Weise auch bei den übrigen Lagen der Punkte C und D gegen A und B, so ergiebt sich, dass Δ überhaupt positiv ist, wenn C und D entweder zugleich innerhalb oder zugleich ausserhalb A und B liegen, also bei den acht Folgen:

$ACDB$, $CABD$, $DCAB$, $ABDC$,
$ADCB$, $DABC$, $CDAB$, $ABCD$,

und zwar bei den vier erstern kleiner als 1, bei den vier letztern grösser als 1.

Dagegen ist Δ negativ, wenn von den Punkten C und D der eine innerhalb und der andere ausserhalb A und B fällt, also bei den vier Lagen:

$ACBD$, $DACB$, $ADBC$, $CADB$.

Fallen C und D zusammen, oder liegen beide unendlich entfernt, so ist $\Delta=1$; fällt C mit A, oder D mit B zusammen, so ist $\Delta=0$; und wenn C mit B oder D mit A zusammenfällt, $\Delta=\infty$.

Uebrigens begreift man leicht, dass, wenn von den vier Punkten irgend drei gegeben sind, mit dem Werthe des D.verhältnisses immer auch der vierte gefunden werden kann.

§. 183. Der Kürze willen soll von jetzt an ein zwischen vier Punkten sich bildendes Doppelschnittsverhältniss dadurch ausgedrückt werden, dass man die Buchstaben für den Anfangspunkt, für den Endpunkt und für den ersten und zweiten Schneidepunkt in der genannten Folge neben einander stellt, sie durch Commata unterscheidet und hierauf mit Haken einschliesst.

Statt $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ wird daher inskünftige

$$(A, B, C, D)$$

und eben so statt $\frac{BA}{AD} : \frac{BC}{CD}$, wo B und D die Grenzpunkte, A und C die Schneidepunkte sind, (B, D, A, C), etc. geschrieben werden.

Will man umgekehrt das D.verhältniss (C, A, B, D) auf gewöhnliche Weise ausdrücken, so bilde man zuerst aus den zwei ersten Buchstaben, C und A, die Form: $\frac{C}{\quad A} : \frac{C}{\quad A}$, und ergänze hierauf das erste Glied durch den dritten Buchstaben, B, und das zweite durch den vierten, D; und man erhält: $\frac{CB}{BA} : \frac{CD}{DA}$.

§. 184. Da sich vier Buchstaben, A, B, C, D, auf 24erlei Weise unter einander versetzen lassen, so entsteht zunächst die Frage, ob und in welchem Zusammenhange die diesen 24 Permutationen entsprechenden D.verhältnisse unter einander stehen, vorausgesetzt, dass die gegenseitige Lage der vier Punkte A, B, C, D unverändert bleibt.

Offenbar ist:

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{BD}{DA} : \frac{BC}{CA} = \frac{CA}{AD} : \frac{CB}{BD} = \frac{DB}{BC} : \frac{DA}{AC},$$

und daher:

I. $(A, B, C, D) = (B, A, D, C) = (C, D, A, B) = (D, C, B, A)$.

Auf dieselbe Weise sind auch von den 20 übrigen D.verhältnissen je vier einander gleich, welche eben so, wie die vier erstern, der Reihe nach A, B, C, D zu ihren Anfangsbuchstaben haben. Es bleibt uns daher nur übrig, die Relationen zwischen den D.verhältnissen aufzusuchen, welche mit einem und demselben Buchstaben, z. B. mit A, anfangen, und deren es 6 giebt.

Nun ist $\left(\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}\right) \left(\frac{AD}{DB} : \frac{AC}{CB}\right) = 1$, also

$$\text{II.} \quad \begin{cases} (A, B, C, D)\ (A, B, D, C) = 1, \text{ und eben so} \\ (A, C, D, B)\ (A, C, B, D) = 1, \\ (A, D, B, C)\ (A, D, C, B) = 1. \end{cases}$$

Man hat ferner, $AB = b$, $AC = c$, $AD = d$ gesetzt, die identische Gleichung: $b(d-c) + c(b-d) + d(c-b) = 0$, und mithin, weil A, B, C, D in einer Geraden liegen, und daher $d - c = CD$, etc. ist:

$AB.CD + AC.DB + AD.BC = 0$. (Vergl. Note zu §. 166.)

Man dividire diese Gleichung durch $AD.CB$, so kommt:

$$\frac{AC.DB}{AD.CB} + \frac{AB.CD}{AD.CB} = 1,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\left(\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}\right) + \left(\frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC}\right) = 1, \text{ d. i.}$$

$$\text{III.} \quad \begin{cases} (A, B, C, D) + (A, C, B, D) = 1, \text{ und eben so} \\ (A, C, D, B) + (A, D, C, B) = 1, \\ (A, D, B, C) + (A, B, D, C) = 1. \end{cases}$$

Durch die Gleichungen II. und III. sind aber die Relationen zwischen je zweien der sechs mit A anfangenden D.verhältnisse bestimmt. Setzt man nämlich:

$$1)\ (A, B, C, D) = a,$$

so wird nach II. $2)\ (A, B, D, C) = \frac{1}{a},$

u. hieraus nach III. $3)\ (A, D, B, C) = \frac{a-1}{a},$

u. hieraus nach II. $4)\ (A, D, C, B) = \frac{a}{a-1},$

u. hieraus nach III. $5)\ (A, C, D, B) = \frac{1}{1-a},$

u. hieraus nach II. $6)\ (A, C, B, D) = 1 - a,$

welches letztere auch aus 1) nach III. folgt.

Mit Hinzufügung der durch I. bestimmten und den Werth nicht ändernden Versetzungen kann man nun auch jedes der übrigen nicht mit A anfangenden D.verhältnisse durch a ausdrücken und somit die Relation zwischen irgend zweien derselben angeben.

Um das Auffinden der Relation zwischen irgend zweien der 24 Doppelschnittsverhältnisse, welche sich aus 4 Punkten in einer Geraden bilden lassen, möglichst leicht zu machen, setze ich folgende Tafel her, wo die vier Punkte durch die vier Ziffern 1, 2, 3, 4 bezeichnet, und die 24 Permutationen dieser vier Elemente, in arithmetischer Ordnung sich folgend, in Werthen der ersten, $(1, 2, 3, 4) = \frac{a}{b}$, ausgedrückt sind.

$$(1,2,3,4)=\frac{a}{b}$$
$$(1,2,4,3)=\frac{b}{a}$$
$$(1,3,2,4)=\frac{b-a}{b}$$
$$(1,3,4,2)=\frac{b}{b-a}$$
$$(1,4,2,3)=\frac{a-b}{a}$$
$$(1,4,3,2)=\frac{a}{a-b}$$
$$(2,1,3,4)=\frac{b}{a}$$
$$(2,1,4,3)=\frac{a}{b}$$
$$(2,3,1,4)=\frac{a-b}{a}$$
$$(2,3,4,1)=\frac{a}{a-b}$$
$$(2,4,1,3)=\frac{b-a}{b}$$
$$(2,4,3,1)=\frac{b}{b-a}$$

$$(3,1,2,4)=\frac{b}{b-a}$$
$$(3,1,4,2)=\frac{b-a}{b}$$
$$(3,2,1,4)=\frac{a}{a-b}$$
$$(3,2,4,1)=\frac{a-b}{a}$$
$$(3,4,1,2)=\frac{a}{b}$$
$$(3,4,2,1)=\frac{b}{a}$$
$$(4,1,2,3)=\frac{a}{a-b}$$
$$(4,1,3,2)=\frac{a-b}{a}$$
$$(4,2,1,3)=\frac{b}{b-a}$$
$$(4,2,3,1)=\frac{b-a}{b}$$
$$(4,3,1,2)=\frac{b}{a}$$
$$(4,3,2,1)=\frac{a}{b}$$

Soll nun z. B. aus dem Werthe von (B, D, C, A) der Werth von (A, D, B, C) gefunden werden, so sehe ich, dass der 1ste, 2te, 3te, 4te Buchstabe der erstern Complexion der 4te, 2te, 1ste, 3te der letztern ist, und dass daher, $(B, D, C, A) = (1, 2, 3, 4) = \frac{a}{b}$ oder a gesetzt, $(A, D, B, C) = (4, 2, 1, 3) = \frac{b}{b-a}$ oder $\frac{1}{1-a}$ wird.

Relationen zwischen Doppelschnittsverhältnissen bei einem Systeme von mehr als vier Punkten in einer geraden Linie.

§. 185. **Lehrsatz.** Sind A, B, C, D, E fünf in einer Geraden liegende Punkte, so ist:

I. $(A, B, C, D)\,(A, B, D, E)\,(A, B, E, C) = 1.$

Beweis. Man braucht nur diese D.verhältnisse in die gewöhnliche Schreibart zu übersetzen:

$$\left(\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}\right) \cdot \left(\frac{AD}{DB} : \frac{AE}{EB}\right) \cdot \left(\frac{AE}{EB} : \frac{AC}{CB}\right) = 1,$$

um sich von der Richtigkeit der Formel zu überzeugen.

Zusatz. Weil $(A, B, E, C)\,(A, B, C, E) = 1$, (§. 184. II.), so lässt sich statt I. auch schreiben:

II. $(A, B, C, D)\,(A, B, D, E) = (A, B, C, E)$, oder

III. $(A, B, C, E) : (A, B, C, D) = (A, B, D, E)$.

§. 186. Die eben aufgestellten Formeln lehren, wie man aus zwei D.verhältnissen, welche drei Punkte gemein haben, und in welchen daher nur fünf verschiedene Punkte vorkommen, den einen jener gemeinschaftlichen Punkte eliminiren, d. h. das aus den vier übrigen Punkten bestehende D.verhältniss finden kann. Sind daher drei D.verhältnisse, von denen jedes mit dem andern dieselben drei Punkte gemein hat, gegeben, so wird man aus ihnen zwei dieser Punkte eliminiren können.

In der That, seyen die drei D.verhältnisse:

$$(A, B, C, D) = d, \quad (A, B, C, E) = e, \quad (A, B, C, F) = f,$$

welche die drei Punkte A, B, C gemeinschaftlich enthalten, und von denen C und B weggeschaft werden sollen. — Zuerst kommt nach Elimination von C:

$$(A, B, D, E) = \frac{e}{d}, \quad (A, B, E, F) = \frac{f}{e},$$

zwei D.verhältnisse mit den gemeinschaftlichen Punkten A, B, E. Um aus ihnen B eliminiren zu können, so hat man nach §. 184.:

$$(A, E, B, D) = \frac{e-d}{e}, \quad (A, E, B, F) = \frac{e-f}{e}$$

und hieraus $$(A, E, D, F) = \frac{e-f}{e-d}.$$

Sind endlich vier D.verhältnisse mit denselben drei gemeinschaftlichen Punkten A, B, C gegeben:

$$(A, B, C, D) = d, \quad (A, B, C, E) = e, \quad (A, B, C, F) = f,$$
$$(A, B, C, G) = g,$$

so kann man daraus diese drei Punkte sämmtlich eliminiren, und somit das D.verhältniss zwischen den vier übrigen Punkten D, E, F, G finden. Denn so wie aus den drei ersten D.verhältnissen: $(A, E, D, F) = \frac{e-f}{e-d}$ folgt, eben so ergiebt sich durch Verbindung des ersten, zweiten und vierten:

$$(A, E, D, G) = \frac{e-g}{e-d}$$

und hieraus $(D, E, A, F) = \frac{e-f}{d-f}$, $(D, E, A, G) = \frac{e-g}{d-g}$,

mithin $$(D, E, F, G) = \frac{e-g}{d-g} : \frac{e-f}{d-f}.$$

§. 187. Lehrsatz. Wenn bei einem Systeme von n Punkten in einer geraden Linie, von den dadurch sich bildenden Doppelschnittsverhältnissen irgend $n-3$ von einander unabhängige gegeben sind, so lassen sich daraus alle übrigen finden.

Beweis. Heissen die n Punkte des Systems: $A, B, C, D \ldots$ Man setze die D.verhältnisse, in deren

jedem die 3 Punkte A, B, C zugleich vorkommen, und deren Anzahl folglich $= n - 3$ ist:

$$(A, B, C, D) = d, \quad (A, B, C, E) = e, \quad (A, B, C, F) = f, \text{ etc.}$$

Nach dem Vorhergehenden kann man hieraus durch successive Elimination von A, B und C alle übrigen zwischen den Punkten des Systems entstehenden D.verhältnisse, also auch die $n-3$ gegebenen und das $(n-2)$te gesuchte in Werthen der $n-3$ Grössen $d, e, f, \ldots$ ausdrücken, und folglich, wenn man aus diesen $n-2$ Gleichungen die Grössen $d, e, f, \ldots$ eliminirt, das $(n-2)$te als Function der $n-3$ gegebenen D.verhältnisse darstellen.

Doppelschnittsverhältnisse bei einem Systeme gerader Linien in einer Ebene.

§. 188. **Lehrsatz.** Wenn drei gerade Linien in einer Ebene, BP, MC, NQ (Fig. 42.) sich in einem und demselben Punkte E schneiden, und von ihnen zwei andere Gerade, deren Durchschnitt A ist, resp. in den Punkten B, M, N und P, C, Q getroffen werden, so ist:

$$(A, B, M, N) = (A, P, C, Q).$$

Beweis. Es verhält sich:

$$AM : BM = ACM : BCM = AME : BME$$

mithin $= ACE : BCE$, weil $ACM + AME = ACE$, etc.

ferner $AC : PC = ACE : PCE$,

folglich $\dfrac{AM}{BM} \cdot \dfrac{AC}{PC} = \dfrac{PCE}{BCE} = \dfrac{PE}{BE}$,

u. eben so $\dfrac{AN}{BN} \cdot \dfrac{AQ}{PQ} = \dfrac{PE}{BE}$,

folglich $\frac{AM}{MB} : \frac{AN}{NB} = \frac{AC}{CP} \cdot \frac{AQ}{QP}$,

d. i. (1) $(A, B, M, N) = (A, P, C, Q)$.

§. 189. Zusatz. Man lege durch E noch eine vierte Gerade RS, welche die AB und AC resp. in R und S schneide, so ist auf gleiche Art:

$$(A, B, M, R) = (A, P, C, S).$$

Da nun die Gleichheit zweier D.verhältnisse, wie aus §. 184. erhellet, sich nicht ändert, wenn man in beiden die vier Buchstaben auf einerlei Weise versetzt, so kann man auch schreiben:

$$(B, M, N, A) = (P, C, Q, A),$$
$$(B, M, A, R) = (P, C, A, S).$$

Multiplicirt man diese zwei Gleichungen in einander, so kommt (§. 185. II.):

$$(2) \quad (B, M, N, R) = (P, C, Q, S),$$

welches folgenden noch allgemeinern Satz giebt:

Wenn man von zwei geraden Linien in einer Ebene die Punkte der einen den Punkten der andern solchergestalt entsprechen lässt, dass die Geraden, welche je zwei sich entsprechende Punkte verbinden, sich in einem gemeinschaftlichen Punkte schneiden, so ist jedes D.verhältniss der einen Linie dem von den entsprechenden Punkten in der andern Linie gebildeten D.verhältnisse gleich; oder:

Von vier sich in einem Punkte schneidenden und in einer Ebene liegenden Geraden wird jede andere Gerade der Ebene nach einem und demselben D.verhältnisse geschnitten.

§. 190. Wenn in der bisher angewendeten Bezeichnungsart eines D.verhältnisses durch Nebeneinanderstel-

lung der die vier Punkte ausdrückenden Buchstaben, statt zweier derselben die Ausdrücke von Linien gesetzt sind, so sollen unter diesen Linien die Punkte verstanden werden, in denen die Gerade durch die zwei andern Punkte des D.verhältnisses von diesen Linien geschnitten wird.

So wird also der Ausdruck (A, B, CE, DE) das D.verhältniss vorstellen, dessen vier Punkte die Punkte A und B und die Durchschnitte von AB mit CE und DE sind. Auf gleiche Art werden in dem Ausdrucke (A, BE, C, DE) durch BE und DE die Punkte angedeutet, in denen die Gerade durch die zwei einzeln gesetzten Punkte A und C von den Geraden BE und DE geschnitten wird.

Vergleicht man damit die 42. Figur, wo D ein in der Geraden NQ willkührlich genommener Punkt ist, so erhellet, dass ersterer Ausdruck einerlei mit (A, B, M, N) und letzterer einerlei mit (A, P, C, Q) ist, dass man folglich statt (1) setzen kann:

$$(A, B, CE, DE) = (A, BE, C, DE),$$

eine Formel, welche immer gelten muss, wie auch die fünf Punkte $A, \ldots E$ in der Ebene liegen mögen. Denn man sieht leicht, dass diese fünf Punkte in der Figur von einander ganz unabhängig sind.

Ueberhaupt leuchtet ein, dass, wenn $A, \ldots E$ beliebige fünf Punkte einer Ebene bezeichnen, alle sechs D.verhältnisse, welche entstehen, wenn man in der Form (A, B, C, D) zu irgend zweien der darin enthaltenen vier Buchstaben den fünften E hinzufügt:

$$(A, B, CE, DE), \quad (A, BE, C, DE), \quad (A, BE, CE, D),$$
$$(AE, B, C, DE), \quad (AE, B, CE, D), \quad (AE, BE, C, D)$$

einander gleich seyn müssen. Denn es sind die D.verhältnisse, in denen der Reihe nach von den sechs Geraden AB, AC, AD, BC, BD, CD, jede derselben von den vier sich in E treffenden Geraden AE, BE, CE, DE geschnitten wird.

§. 191. Seyen wiederum A, B, C, D, E fünf beliebige Punkte in einer Ebene, und heissen die Punkte, in welchen die Gerade AB von den Geraden DE, EC, CD geschnitten wird, resp. C', D', E',: so sind A, B, C', D', E' fünf in einer Geraden liegende Punkte, und man hat nach §. 185.:

$$(A, B, C', D')\ (A, B, D', E') = (A, B, C' E')$$

oder, mit Anwendung der im vorigen §. erörterten Bezeichnungsart:

$$(A, B, DE, CE)\ (A, B, CE, CD) = (A, B, DE, CD).$$

Von diesen drei D.verhältnissen ist in dem ersten E, in dem zweiten C und in dem dritten D der hinzugefügte Buchstabe. Da nun vermöge des zuletzt Erwiesenen der Werth eines solchergestalt ausgedrückten D.verhältnisses bei jeder Ortsveränderung des hinzugefügten Buchstaben immer derselbe bleibt, so wird auch seyn:

$$(AE, B, DE, C)\ (A, BC, E, CD) = (A, B, DE, CD)$$

eine Relation, die sich noch einfacher auf folgende Weise darstellen lässt.

Man verbinde die fünf Punkte A, B, C, D, E in der genannten Ordnung jeden mit dem nächstfolgenden und den letzten mit dem ersten durch gerade Linien, so erhält man ein System von fünf von einander unabhängigen Geraden in einer Ebene:

CD, DE, EA, AB, BC, welche man

mit a, b, c, d, e

benenne. Alsdann sind die vier Punkte des D.verhältnisses (AE, B, DE, C) diejenigen, in welchen die Gerade BC der Reihe nach von den Geraden AE, AB, DE, CD, d. i. e von c, d, b, a geschnitten wird. Werde daher dieses D.verhältniss kurz durch

$$^{e}(c, d, b, a)$$

vorgestellt, so dass ausserhalb der Haken links oben die Linie e gesetzt wird, in welcher die das D.verhältniss bildenden vier Punkte enthalten sind, statt der vier Punkte selbst aber vier Linien c, d, b, a stehen, welche die Linie e in diesen Punkten schneiden.

Auf die nämliche Art ist (A, BC, E, CD) das D.verhältniss, nach welchem AE von AB, BC, DE und CD, d. i. c von d, e, b und a geschnitten wird, und kann daher passend durch $^{c}(d, e, b, a)$ ausgedrückt werden, so wie endlich (A, B, DE, CD) durch $^{d}(c, e, b, a)$.

Substituirt man nun diese Bezeichnungsarten in der obigen Gleichung, so kommt:

$$^{e}(c, d, b, a) \,.\, ^{c}(d, e, b, a) = {}^{d}(c, e, b, a),$$

eine Formel, welche lehrt, wie man bei einem Systeme von fünf Geraden (a, b, c, d, e) in einer Ebene aus den zwei D.verhältnissen, nach welchen beliebige zwei dieser Linien (e und c) von den jedesmal vier übrigen Linien (c, d, b, a und d, e, b, a) geschnitten werden, das D.verhältniss finden kann, nach welchem jede der andern drei Linien (z. B. d) von den vier übrigen (c, e, b, a) geschnitten wird.

Es bedarf keiner Erörterung, dass auch bei diesen Formen der D.verhältnisse die obige Lehre von der Versetzung der vier Elemente vollkommen anwendbar ist. Man kann daher auch schreiben (§. 184. I.):

$$^{e}(a, b, d, c) \,.\, ^{c}(a, b, e, d) = ^{d}(a, b, e, c);$$

und, wenn man statt dieser D.verhältnisse die reciproken setzt (ebend. II.):

$$^{e}(a, b, c, d) \,.\, ^{c}(a, b, d, e) = ^{d}(a, b, c, e)$$

oder

$$^{c}(a, b, d, e) \,.\, ^{d}(a, b, e, c) \,.\, ^{e}(a, b, c, d) = 1,$$

Formeln, welche sich ihrem Aeussern nach von den Formeln in §. 185. nur dadurch unterscheiden, dass, statt der dortigen grossen Buchstaben, hier die entsprechenden kleinen stehen, und der in jeder Complexion von den fünfen a, b, c, d, e jedesmal fehlende Buchstabe links oben beigefügt ist.

— Um den Satz, dass durch die D.verhältnisse in irgend zweien der fünf Geraden die D.verhältnisse in jeder der drei übrigen gefunden werden können, noch durch ein Beispiel zu erläutern, so seyen gegeben:

$$^{a}(b, c, d, e) = p, \quad ^{b}(a, c, d, e) = q,$$

und gesucht werde $^{e}(d, b, c, a) = x.$

Nach dem Vorigen hat man:

$$^{a}(c, d, b, e) \,.\, ^{b}(c, d, e, a) = ^{e}(c, d, b, a).$$

Sodann ist (§. 184.):

$$^{a}(c, d, b, e) = \frac{p-1}{p}, \quad ^{b}(c, d, e, a) = \frac{q}{q-1},$$

$$^{e}(c, d, b, a) = \frac{1}{1-x};$$

und daher:

$$\frac{p-1}{p} \,.\, \frac{q}{q-1} = \frac{1}{1-x},$$

folglich

$$x = \frac{p-q}{(p-1)q}.$$

§. 192. Lehrsatz. Wenn bei einem Systeme n gerader Linien in einer Ebene von den Doppelschnittsverhältnissen, welche in diesen Linien von den gegenseitigen Durchschnitten derselben gebildet werden, irgend $2n-8$ von einander unabhängige gegeben sind, so lassen sich daraus alle übrigen finden.

Beweis. Heissen die n Linien des Systems: $a, b, c, d, \ldots$, und seyen anfänglich alle die D.verhältnisse bekannt, welche in a und b von dem gegenseitigen Durchschnitte dieser Linien und den Durchschnitten mit jeder der übrigen gebildet werden. Nach dem vorhergehenden §. lassen sich hieraus alle D.verhältnisse ableiten, welche in einer dritten Linie des Systems, z. B. in c, zwischen den Durchschnitten dieser Linie mit a und b und einer vierten und fünften, also überhaupt mit zweien andern, des Systems statt finden; und hieraus nach §. 186. alle übrigen D.verhältnisse in c, und auf gleiche Weise die D.verhältnisse in jeder der übrigen Linien.

Da nun bei einem Systeme von n Linien in jede derselben $n-1$ Durchschnittspunkte fallen, und mithin nach §. 187. alle D.verhältnisse einer solchen Linie durch beliebige $(n-1)-3$ von einander unabhängige gegeben sind, so lassen sich alle in unserm Systeme vorkommenden D.verhältnisse, also auch die $2n-8$ gegebenen und ein $(2n-7)$tes gesuchtes, als Functionen von $n-4$ in a, und $n-4$ in b begriffenen, von einander unabhängigen D.verhältnissen ausdrücken; woraus sich dann, nach Elimination dieser letztern $2(n-4)$, die gesuchte Gleichung zwischen den erstern $2n-7$ ergiebt. (und einzig?)

Zusatz. Mit diesem Beweise ist zugleich der dem §. 156. analoge Satz dargethan:

Bei einem Systeme gerader Linien in einer Ebene sind mit den Doppelschnittsverhältnissen zweier dieser Linien die Doppelschnittsverhältnisse aller übrigen Linien gegeben.

Doppelschnittsverhältnisse bei einem Systeme von Ebenen.

§. 193. Man denke sich ein System von n Ebenen, welche $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ heissen. Jede dieser Ebenen, wie α, wird von den $n-1$ übrigen Ebenen $\beta, \gamma, \delta, \ldots$ in $n-1$ Geraden $\alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta, \ldots$ geschnitten, wenn wir den Durchschnitt zweier Ebenen durch Zusammenstellung der für sie gewählten Buchstaben bezeichnen. Jede dieser Geraden aber, wie $\alpha\beta$, enthält ein System von $n-2$ Punkten, indem sie von den übrigen $n-2$ Ebenen $\gamma, \delta, \ldots$ in eben so viel Punkten geschnitten wird, die man ähnlicherweise durch $\alpha\beta\gamma, \alpha\beta\delta, \ldots$ ausdrücken kann. Auch lassen sich diese $n-2$ Punkte einer Geraden $\alpha\beta$ noch ansehen als die Durchschnitte von $\alpha\beta$ mit den übrigen $n-2$ Geraden $\alpha\gamma, \alpha\delta, \ldots$ der einen α, oder mit den übrigen $n-2$ Geraden $\beta\gamma, \beta\delta, \ldots$ der andern β der zwei Ebenen, von welchen $\alpha\beta$ der gemeinschaftliche Durchschnitt ist.

Je vier solcher $n-2$, in einer Geraden liegenden, Punkte, in einer gewissen Folge genommen, bestimmen nun den Werth eines D.verhältnisses, weswegen n nicht kleiner als 6 seyn darf, wenn von D.verhältnissen bei einem Systeme von Ebenen die Rede seyn soll. Die gegenseitigen Beziehungen aber, die zwischen allen solchergestalt sich bildenden D.verhältnissen statt finden, lassen sich ohne neue Hülfsmittel schon aus den, bei einem Systeme gerader Linien in einer Ebene gefunde-

nen, Relationen herleiten, und wir können sogleich folgenden allgemeinen Satz darthun.

§. 194. Lehrsatz. Wenn bei einem Systeme von n Ebenen von den Doppelschnittsverhältnissen, welche in den Durchschnitten je zweier Ebenen zwischen den Durchschnittspunkten derselben mit den übrigen Ebenen statt finden, irgend $3n-15$ von einander unabhängige gegeben sind, so lassen sich hieraus alle übrigen finden.

Beweis. Heissen die n Ebenen wiederum: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ Man fasse zuerst die drei Ebenen α, β, γ ins Auge. Ihre gegenseitigen Durchschnitte sind die drei Geraden $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ mit dem gemeinschaftlichen Punkte $\alpha\beta\gamma$. Nun lassen sich nach §. 192. aus den D.verhältnissen in $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$, als in zweien Linien der Ebene α, die D.verhältnisse in allen übrigen $n-3$ Linien dieser Ebene, also auch die D.verhältnisse in $\alpha\delta$ finden, und eben so aus den D.verhältnissen in $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$ die D.verhältnisse in der, gleichfalls der Ebene β zugehörigen, Linie $\beta\delta$ ableiten. Aus den D.verhältnissen in $\alpha\delta$ und $\beta\delta$, als in zweien Linien der Ebene δ, ergeben sich ferner die D.verhältnisse der Linie $\delta\varepsilon$ in derselben Ebene; und auf die nämliche Art die D.verhältnisse jeder andern Linie, welche in keiner der drei Ebenen α, β, γ liegt. Jedes in dem Systeme vorkommende D.verhältniss muss sich folglich als eine Function der in den drei Linien $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ begriffenen D.verhältnisse darstellen lassen. Offenbar aber sind die D.verhältnisse in jeder dieser drei Linien von denen in den jedesmal zwei andern ganz unabhängig; es enthält ferner eine jede dieser Linien $n-2$ Punkte und folglich (§. 187.) $n-5$ von einander unabhängige D.verhältnisse, mithin alle drei Linien $3n-15$ solcher Ver-

hältnisse, wovon jedes andere D.verhältniss des Systems abhängig seyn muss. Sind aber diese Beziehungen in Gleichungen gebracht, so werden, eben so wie in §. 187. und 192., auch aus irgend $3n - 15$ andern von einander unabhängigen D.verhältnissen des Systems die übrigen gefunden werden können.

Zusatz. Weil jede Linie des Systems $n - 5$, und folglich irgend drei derselben, mögen sie sich, wie vorhin $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ in einem Punkte, oder auch gar nicht schneiden, $3n - 15$ von einander unabhängige D.verhältnisse in sich fassen, so folgern wir noch analog mit §. 159.:

Bei einem Systeme von Ebenen können aus den Doppelschnittsverhältnissen irgend dreier, nicht in derselben Ebene enthaltener, Durchschnittslinien der Ebenen die Doppelschnittsverhältnisse aller übrigen Durchschnittslinien gefunden werden.

§. 195. Man sieht aus dem vor. §., wie mittelst der für ein System gerader Linien in einer Ebene in §. 191. aufgestellten Formel alle, auch bei einem Systeme von Ebenen vorkommenden, Beziehungen zwischen D.verhältnissen ausfindig gemacht werden können. Es lässt sich aber zu dieser Absicht der gedachten Formel eine noch schicklichere, die Uebersicht der Rechnung mehr erleichternde, Gestalt geben.

Seyen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ beliebige sechs Ebenen. Die Durchschnitte der Ebene ζ mit den fünf übrigen werden, wie vorhin, durch $\alpha\zeta$, $\beta\zeta$, $\gamma\zeta$, $\delta\zeta$, $\varepsilon\zeta$ bezeichnet. Da diese fünf Durchschnitte eben so viel in einer Ebene liegende

Gerade sind, so ist (§. 191.), wenn man sie der Kürze willen resp. a, b, c, d, e nennt:

$${}^{e}(a,b,c,d)\,.\,{}^{c}(a,b,d,e) = {}^{d}(a,b,c,e).$$

Nun begreift das erste dieser drei D.verhältnisse, ${}^{e}(a,b,c,d)$, die vier Punkte der Geraden e oder $\varepsilon\zeta$, in welchen dieselbe von den vier Geraden a, b, c, d oder $\alpha\zeta, \beta\zeta, \gamma\zeta, \delta\zeta$, und mithin auch von den vier, diese Geraden enthaltenden, Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ geschnitten wird. Es lässt sich hiernach jenes D.verhältniss dem Vorigen analog durch

$${}^{\varepsilon\zeta}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

ausdrücken. Eben so besteht ${}^{c}(a, b, d, e)$ aus den vier Punkten, in welchen die Gerade $\gamma\zeta$ von den Ebenen $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ geschnitten wird, und werde daher ausgedrückt durch ${}^{\gamma\zeta}(\alpha,\beta,\delta,\varepsilon)$, so wie ${}^{d}(a,b,c,e)$ durch ${}^{\delta\zeta}(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$.

Substituiren wir diese Ausdrücke in der obigen Formel, so wird sie:

$${}^{\varepsilon\zeta}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\,.\,{}^{\gamma\zeta}(\alpha,\beta,\delta,\varepsilon) = {}^{\delta\zeta}(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon),$$

eine Formel, die mit der in §. 191. ihrem Wesen nach ganz identisch ist, und rücksichtlich ihres Aeussern sich nur dadurch von jener unterscheidet, dass dem jedesmal links oben stehenden Buchstaben ein neuer, ζ, beigefügt ist.

§. 196. Zusätze. *a.* So wie von vier in einer Ebene enthaltenen und sich in einem Punkte schneidenden Geraden jede andere Gerade der Ebene nach demselben D.verhältnisse geschnitten wurde (§. 189.), so gilt auch von vier Ebenen im Raume der Satz:

Vier Ebenen, welche sich in einer und derselben Geraden schneiden, theilen jede andere Gerade nach einem und demselben D.verhältnisse.

Denn heissen die vier Ebenen α, β, γ, δ, und ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie e. Werden ferner von diesen Ebenen zwei beliebig gezogene Gerade f und f', die eine f in A, B, C, D, die andere f' in A', B', C', D' resp. geschnitten. Dass nun dabei

$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D'),$$

fliesst in dem Falle, wo f und f' in einer Ebene liegen, unmittelbar aus §. 189., weil alsdann die vier Geraden AA', BB', CC', DD' sich in einem Punkte, dem Durchschnitte dieser Ebene mit der Geraden e, schneiden.

Sind aber f und f' nicht in einer Ebene enthalten, so lege man durch jede derselben eine Ebene nach Belieben. Der Durchschnitt dieser zwei Ebenen, welcher f'' heisse, werde von den Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in den Punkten A'', B'', C'', D'' geschnitten, so ist vermöge des vorigen Falls, weil f'' mit f in einer Ebene liegt: $(A'', B'', ..) = (A, B, ..)$, und weil f'' mit f' in einer Ebene ist: $(A'', B'', ..) = (A', B', ..)$; also wiederum: $(A, B, ..) = (A', B', ..)$.

b. Sind in dem Ausdrucke eines D.verhältnisses statt zweier der vier Punkte zwei Ebenen gesetzt, und versteht man unter diesen Ebenen die Punkte, in welchen die Ebenen von der Geraden, welche die zwei übrigen Punkte im Ausdrucke verbindet, geschnitten werden, so lässt sich mittelst des eben erwiesenen Satzes, ähnlicherweise, wie in §. 190., darthun, dass, wenn $A, \ldots F$ beliebige sechs Punkte im Raume sind, und man in der Form (A, B, C, D) zu zweien der darin enthaltenen vier

Buchstaben das Buchstabenpaar EF hinzufügt, sämmtliche sechs auf diese Art entstehenden D.verhältnisse:

$$(A, B, CEF, DEF), \quad (A, BEF, C, DEF),$$
$$(A, BEF, CEF, D), \text{ etc.}$$

gleiche Werthe haben. — Denn es sind die D.verhältnisse, in denen der Reihe nach die sechs Geraden $AB, AC, AD, \ldots$ von den vier Ebenen AEF, BEF, CEF, DEF, welche sich gemeinschaftlich in EF schneiden, getheilt werden.

§. 197. Es soll nun noch die Anwendung der in §. 195. gegebenen Formel auf die Lösung der Aufgaben, welche zufolge des Lehrsatzes §. 194. gebildet werden können, in einem einfachen Beispiele gezeigt werden.

Aufgabe. Bei sechs Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ wird der Durchschnitt je zweier von den vier übrigen in vier Punkten geschnitten, und somit in dem Durchschnitte je zweier Ebenen ein D.verhältniss gebildet. Seyen nun die D.verhältnisse in den Durchschnitten $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$:

$$^{\beta\gamma}(\alpha, \delta, \varepsilon, \zeta) = p, \quad ^{\alpha\gamma}(\beta, \delta, \varepsilon, \zeta) = q, \quad ^{\alpha\beta}(\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta) = r$$

gegeben; das D.verhältniss in dem Durchschnitte $\varepsilon\zeta$,

$$^{\varepsilon\zeta}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = x$$

zu finden.

Auflösung. Jede der sechs Ebenen enthält fünf Durchschnitte, also ein System von fünf Geraden, wobei man nach §. 191. aus den D.verhältnissen zweier derselben das D.verhältniss jeder der drei übrigen finden kann.

Man suche daher in der Ebene γ aus den gegebenen D.verhältnissen der Geraden $\alpha\gamma$ und $\beta\gamma$, das der Geraden $\gamma\varepsilon$; und eben so in der Ebene β aus den D.verhältnissen der $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$, das der $\beta\varepsilon$. Hiermit kennt man

zwei D.verhältnisse in der Ebene ε, die der Geraden $\gamma\varepsilon$ und $\beta\varepsilon$, woraus man auf gleiche Weise das gesuchte D.verhältniss der in derselben Ebene liegenden Geraden $\varepsilon\zeta$ finden kann.

Die Ausführung selbst ist folgende. Man hat nach §. 195.

$$1)\quad {}^{\beta\gamma}(\delta,\zeta,\alpha,\varepsilon)\,.\,{}^{\alpha\gamma}(\delta,\zeta,\varepsilon,\beta)={}^{\gamma\varepsilon}(\delta,\zeta,\alpha,\beta),$$

$$2)\quad {}^{\beta\gamma}(\delta,\zeta,\alpha,\varepsilon)\,.\,{}^{\alpha\beta}(\delta,\zeta,\varepsilon,\gamma)={}^{\beta\varepsilon}(\delta,\zeta,\alpha,\gamma),$$

$$3)\quad {}^{\gamma\varepsilon}(\alpha,\delta,\beta,\zeta)\,.\,{}^{\beta\varepsilon}(\alpha,\delta,\zeta,\gamma)={}^{\varepsilon\zeta}(\alpha,\delta,\beta,\gamma).$$

Setzt man daher noch ${}^{\gamma\varepsilon}(\delta,\zeta,\alpha,\beta)=m$, ${}^{\beta\varepsilon}(\delta,\zeta,\alpha,\gamma)=n$, so erhält man nach §. 184.:

$$ {}^{\beta\gamma}(\delta,\zeta,\alpha,\varepsilon)=1-p,\quad {}^{\gamma\varepsilon}(\alpha,\delta,\beta,\zeta)=1-m,$$

$$ {}^{\alpha\gamma}(\delta,\zeta,\varepsilon,\beta)=\frac{1}{1-q},\quad {}^{\beta\varepsilon}(\alpha,\delta,\zeta,\gamma)=\frac{1}{1-n},$$

$$ {}^{\alpha\beta}(\delta,\zeta,\varepsilon,\gamma)=\frac{1}{1-r},\quad {}^{\varepsilon\zeta}(\alpha,\delta,\beta,\gamma)=1-\frac{1}{x}.$$

Hierdurch werden die Gleichungen 1), 2), 3):

$$\frac{1-p}{1-q}=m,\quad \frac{1-p}{1-r}=n,\quad \frac{1-m}{1-n}=1-\frac{1}{x},$$

und hieraus folgt nach Elimination von m und n:

$$x=\frac{1-q}{1-p}\cdot\frac{p-r}{q-r}.$$

Sechstes Capitel.

Die geometrischen Netze.

I. Das Netz in einer Ebene.

§. 198. Seyen A, B, C, D (Fig. 43.) vier beliebige Punkte in einer Ebene, von denen jedoch keine drei in einer Geraden liegen. A, B, C zu den drei F.punkten der Ebene genommen, sey $D \equiv aA + bB + cC$, oder symmetrischer, wenn man $a + b + c = -d$ setzt (§. 24. c.):

$$\text{I.} \quad aA + bB + cC + dD = 0.$$

Man verbinde die vier Punkte zu zweien durch Gerade, und nenne A' den Durchschnitt der Geraden BC und AD, B' den Durchschnitt der CA und BD, C' den Durchschnitt der AB und CD, oder, — wie wir dies der Kürze willen inskünftige schreiben wollen, — sey

$$BC \cdot AD \equiv A', \quad CA \cdot BD \equiv B', \quad AB \cdot CD \equiv C'.$$

Alsdann ist (§. 24. d.):

$$\text{II.} \begin{cases} bB + cC = -aA - dD = a'A', \\ cC + aA = -bB - dD = b'B', \\ aA + bB = -cC - dD = c'C', \end{cases}$$

wo $a' = b + c$, $b' = c + a$, $c' = a + b$.

Man ziehe noch die Geraden $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, und setze:

$$B'C' \cdot AD \equiv A'', \quad C'A' \cdot BD \equiv B'', \quad A'B' \cdot CD \equiv C''.$$

Die Ausdrücke für diese neuen Durchschnittspunkte ergeben sich durch paarweise Addition der Gleichungen

II., und mit der Berücksichtigung, dass $aA + bB + cC = -dD$. Es wird nämlich:

$$\text{III.} \begin{cases} 2aA + bB + cC = aA - dD = b'B' + c'C' = (a-d)A'' \\ aA + 2bB + cC = bB - dD = c'C' + a'A' = (b-d)B'' \\ aA + bB + 2cC = cC - dD = a'A' + b'B' = (c-d)C'' \end{cases}$$

Sey endlich

$$BC \cdot B'C' \equiv F,\ CA \cdot C'A' \equiv G,\ AB \cdot A'B' \equiv H,$$

so kommt, wenn man die Gleichungen II. paarweise von einander subtrahirt:

$$\text{IV.} \begin{cases} bB - cC = c'C' - b'B' = (b-c)F, \\ cC - aA = a'A' - c'C' = (c-a)G, \\ aA - bB = b'B' - a'A' = (a-b)H. \end{cases}$$

Wir ziehen hieraus nachstehende merkwürdige Eigenschaften unserer Construction.

1) Vermöge II. verhält sich:

$$BA' : A'C = c : b,$$
$$CB' : B'A = a : c,$$
$$AC' : C'B = b : a,$$

folglich $\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$, d. h.

Verbindet man die drei Spitzen eines Dreiecks mit einem vierten in der Ebene des Dreiecks liegenden Punkte durch gerade Linien, so ist das Product aus den drei Verhältnissen, nach welchen die Seiten des Dreiecks von diesen Linien geschnitten werden, der positiven Einheit gleich.

2) Aus der ersten Gleichung in II. folgt:

$$cC - a'A' \equiv B,\ a'A' + aA \equiv D,$$

und daher

$$CB : BA' = -a' : c,$$
$$A'D : DA = a : a'.$$

Es war aber auch $AB' : B'C = c : a$;

mithin $$\frac{CB}{BA'} \cdot \frac{A'D}{DA} \cdot \frac{AB'}{B'C} = -1,$$

eine Relation, welche folgendergestalt ausgesprochen, sich leicht behalten lässt:

Das Product aus den drei Verhältnissen, nach welchen die drei Seiten eines Dreiecks (ACA') *von einer vierten Geraden* (BDB') *geschnitten werden* (CA' in B, $A'A$ in D, AC in B'), *ist der negativen Einheit gleich.*

3) Nach II. ist: $A' \equiv aA + dD$,
und nach III.: $A'' \equiv aA - dD$;

folglich $$\frac{AA'}{A'D} : \frac{AA''}{A''D} = \frac{d}{a} : \frac{-d}{a} = -1,$$

oder $$(A, D, A', A'') = -1.$$

Auf dieselbe Weise finden sich auch die D.verhältnisse

$$(B, D, B', B''),\ (C, D, C', C''),$$
$$(B, C, A', F),\ (C, A, B', G),\ (A, B, C', H),$$
$$(B', C', A'', F),\ (C', A', B'', G),\ (A', B', C'', H)$$

der negativen Einheit gleich; also:

Verbindet man vier beliebige Punkte in einer Ebene zu zweien durch gerade Linien, und die drei somit entstehenden Durchschnitte von Neuem durch Gerade, so erhält man ein System von neun Linien, und in jeder derselben vier Durchschnitte. Das D.verhältniss aber, nach welchem bei je vier solchen Punkten der Theil der Linie zwischen einem der beiden äussern und dem nicht zunächst liegenden innern Punkte, in den beiden andern geschnitten wird, ist der negativen Einheit gleich.

Diese Gleichheit der D.verhältnisse kann auch schon aus §. 188. leicht dargethan werden. Weil nämlich AC, DB, $A''F$ sich in einem Punkte, B', schneiden, so ist

$$(A, D, A', A'') = (C, B, A', F),$$

und eben so, weil AB, DC, $A''F$ sich in einem Punkte, C', schneiden:

$$(A, D, A', A'') = (B, C, A', F),$$

folglich $(B, C, A', F) = (C, B, A', F)$.

Nun ist nach §. 184. von diesen zwei einander gleichen D.verhältnissen das eine auch dem Reciproken des andern gleich, und mithin jedes derselben $= \pm 1$. Da aber ein D.verhältniss nicht $= + 1$ seyn kann, ohne dass zwei seiner vier Punkte zusammenfallen, oder unendlich entfernt liegen (§. 182.), so gilt nur die negative Einheit, und folglich ist

$$(A, D, A', A'') = (B, C, A', F) = -1.$$

Sodann ist $(B, C, A', F) = (C', B', A'', F)$, weil BC', CB', $A'A''$ in A zusammentreffen. Eben so wird ferner bewiesen, dass $(B, D, B', B'') = (C, A, B', G) = (A', C', B'', G) = -1$, u. s. w.

Man bemerke hierbei, dass ein der negativen Einheit gleiches D.verhältniss ganz mit der sogenannten harmonischen Theilung übereinkommt. — Drei Grössen stehen in einer stetigen harmonischen Proportion, wenn ihre Reciproken eine stetige arithmetische Proportion ausmachen, oder was dasselbe ist, wenn die Differenz der ersten und zweiten Grösse sich verhält zur Differenz der zweiten und dritten, wie die erste zur dritten. Sind demnach A, B, C, D vier Punkte einer Geraden, so bilden die drei Abschnitte AB, AC, AD eine harmonische Proportion, wenn $AC - AB : AD - AC = AB : AD$, d. i. $BC : CD = AB : AD$. Man sagt daher, eine Linie AD werde harmonisch getheilt, wenn sie in drei Theile AB, BC, CD zerlegt wird, so dass sich der mittlere Theil zu dem einen der beiden äussern verhält, wie der andere äussere zu der ganzen Linie. Es folgt aber aus dieser Proportion:

$$\frac{BC}{CD} \cdot \frac{BA}{AD} = -1, \quad \text{d. i.} \quad (B, D, C, A) = -1.$$

Carnot sagt dafür in seiner *Géométrie de position*, die Linie BD werde in C und A in proportionale Segmente getheilt.

Uebrigens erhellet aus §. 184., dass, wenn $(B, D, C, A) = -1$, auch $(B, D, A, C) = (D, B, A, C) = (D, B, C, A) = (C, A, B, D) = (C, A, D, B) = (A, C, B, D) = (A, C, D, B) = -1$ ist.

4) Durch Addition der drei Gleichungen IV. erhält man:

$$(b-c)F + (c-a)G + (a-b)H = 0;$$

mithin liegen F, G und H in einer geraden Linie; also:

Beschreibt man in ein Dreieck (ABC) ein zweites ($A'B'C'$), so dass die drei Geraden, welche die gegenüberliegenden Spitzen verbinden, sich in Einem Punkte (D) schneiden: so sind die drei Punkte (F, G, H), in denen sich die gegenüberliegenden Seiten schneiden, in Einer Geraden enthalten.

5) Zieht man die Gleichungen III. paarweise von einander ab, so kommt mit Berücksichtigung der Gleichungen IV.:

$$(b-d)B'' - (c-d)C'' = (b-c)F,$$
$$(c-d)C'' - (a-d)A'' = (c-a)G,$$
$$(a-d)A'' - (b-d)B'' = (a-b)H.$$

Mithin liegen auch B'' und C'' mit F, C'' und A'' mit G, A'' und B'' mit H in gerader Linie, welches folgenden Satz giebt:

Wird in ein Dreieck ABC ein zweites $A'B'C'$, und in dieses ein drittes $A''B''C''$ einbeschrieben, dergestalt, dass die gleichnamigen Spitzen mit einem vierten Punkte D immer in einer Geraden liegen, also A, A', A'' mit D; B, B', B'' mit D; C, C', C'' mit D: so schneiden sich hinwiederum die gleichnamigen Seiten dieser drei Dreiecke in einem Punkte, nämlich $BC, B'C', B''C''$ in F; $CA, C'A', C''A''$ in G; $AB, A'B', A''B''$ in H; auch liegen diese drei Punkte F, G, H, in einer Geraden.

§. 199. Zusätze. *a.* Die in 2) erhaltene Relation, worauf übrigens schon die in §. 157. 1. gefundenen und die zum Beweise des Satzes §. 188. angewendeten Formeln hinauskommen, lässt sich noch symmetrischer aus den allgemeinen Ausdrücken in §. 39. für die Durchschnitte einer Geraden mit den Seiten des F.dreiecks ABC ableiten. Denn heissen diese Durchschnitte I, K, L, so ist nach §. 39.:

$$I \equiv \gamma B - \beta C, \quad K \equiv \alpha C - \gamma A, \quad L \equiv \beta A - \alpha B,$$

und daher, wie vorhin:

$$(1) \quad \frac{BI}{IC} \cdot \frac{CK}{KA} \cdot \frac{AL}{LB} = \left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)\left(-\frac{\gamma}{\alpha}\right)\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right) = -1.$$

b. Werden die Seiten des Dreiecks ABC von einer zweiten Geraden in M, N, O geschnitten, so hat man auf gleiche Weise:

$$(2) \quad \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AO}{OB} = -1.$$

Dividirt man nun (2) in (1), so kommt:

$$(B, C, I, M)\ (C, A, K, N)\ (A, B, L, O) = 1,$$

oder, wenn man die Geraden IKL und MNO mit a und b bezeichnet (§. 190.):

$$(3) \quad (B, C, a, b)\ (C, A, a, b)\ (A, B, a, b) = 1,$$

und, wenn man die Dreiecksseiten BC, CA, AB resp. c, d, e nennt (§. 191.):

$$^{c}(e, d, a, b) \cdot {}^{d}(c, e, a, b) \cdot {}^{e}(d, c, a, b) = 1,$$

eine Formel, die, wie man gleich erkennt, mit der in §. 191. auf weniger einfachem Wege erhaltenen ganz identisch ist. Sie drückt, vermöge der Form (3), folgenden Satz aus:

Das Product aus den drei Dverhältnissen, nach welchen die Seiten eines Dreiecks (ABC) von zwei andern Geraden (a, b) geschnitten werden, ist der positiven Einheit gleich.

c. Diese Eigenschaft und die obige in 2), gelten aber nicht bloss für das Dreieck, sondern können auf jedes beliebige Vieleck ausgedehnt werden. Hat man nämlich in einer Ebene ein Vieleck und eine Gerade, so zerlege man ersteres durch Diagonalen aus einem Punkte in Dreiecke, bemerke hierauf die Punkte, in denen die Seiten dieser Dreiecke (oder ihre Verlängerungen) von jener Geraden geschnitten werden, und bilde für jedes Dreieck eine Gleichung, wie (1). Multiplicirt man nun diese Gleichungen in einander, so heben sich die Verhältnisse, nach denen die Diagonalen geschnitten werden, gegenseitig auf, und man bekommt den Satz:

Das Product aus den Verhältnissen, nach welchen alle Seiten eines ebenen Vielecks von einer Geraden geschnitten werden, ist der Einheit gleich, und zwar der positiven oder negativen, nachdem die Seitenzahl des Vielecks gerade oder ungerade ist.

Bildet man dieselbe Gleichung für eine zweite das Vieleck schneidende Gerade und dividirt diese Gleichung in die vorige, so erhält man als Resultat:

Das Product aus den D.verhältnissen, nach denen alle Seiten eines ebenen Vielecks von zwei Geraden geschnitten werden, ist der positiven Einheit gleich.

Ist endlich das Vieleck nicht in einer Ebene enthalten, so gelten dieselben zwei Sätze, wenn man die Seiten des Vielecks mit einer oder zwei Ebenen, statt Geraden, geschnitten werden lässt.

Der Beweis hierfür ist dem obigen ganz ähnlich. Ich brauche übrigens wohl kaum hinzuzusetzen, dass bei

allen diesen Verhältnissen jede Spitze des Vielecks nicht als gemeinschaftlicher Anfangs- oder Endpunkt der zwei darin zusammenstossenden Seiten, sondern immer als Anfangspunkt der einen und Endpunkt der andern Seite genommen werden muss (§. 181.).

§. 200. Die Construction der in §. 198. betrachteten Figur bestand darin, dass wir vier in einer Ebene liegende Punkte A, B, C, D durch Gerade verbanden, und die somit sich ergebenden drei Durchschnittspunkte A', B', C' abermals durch Gerade verknüpften. Hierdurch erhielten wir sechs neue Durchschnitte A'', B'', C'', F, G, H, die nun wiederum unter sich und mit den sieben erstern Punkten durch Gerade *) verbunden werden können. Und so lässt sich das Verbinden der durch vor-

*) Dies werden folgende sechszehn seyn:

AF, BA'', CA'', DF, $B''C''F$
AB'', BG, CB'', DG, $C''A''G$
AC'', BC'', CH, DH, $A''B''H$ und FGH.

Untersucht man die Punkte, in denen sich diese Linien unter einander und mit den vorhergezogenen schneiden, so wird man wiederum eine Menge merkwürdiger Verhältnisse entdecken. Auch wird es mehrere Male, eben so wie im Vorigen, der Fall seyn, dass drei dieser Linien sich in einem Punkte schneiden, und dass drei oder mehrere Durchschnittspunkte in einer Geraden enthalten sind. So liegen

in BC die Punkte

$$DG\cdot AC'' \equiv bB + 2cC, \quad DH\cdot AB'' \equiv 2bB + cC;$$

in $B'C'$ die Punkte

$$DG\cdot AB'' \equiv 3aA + 2bB + cC, \quad DH\cdot AC'' \equiv 3aA + bB + 2cC,$$
$$BG\cdot CB'' \equiv aA + 2bB - cC, \quad CH\cdot BC'' \equiv aA - bB + 2cC;$$

in AD die Punkte

$$BC''\cdot CB'' \equiv aA + 2bB + 2cC, \quad CH\cdot BG \equiv -aA + bB + cC.$$

Die auf ähnliche Art in die Geraden CA, $C'A'$, BD und AB; $A'B'$, CD fallenden Punkte ergeben sich hieraus durch blosse Vertauschung der Buchstaben.

hergegangene Verbindungen entstandenen Durchschnittspunkte ohne Ende fortsetzen.

Das auf solche Weise aus den vier in einer Ebene beliebig genommenen Punkten A, B, C, D sich nach und nach bildende System von Linien wollen wir ein Netz in einer Ebene, die Linien selbst und ihre gegenseitigen Durchschnittspunkte die Linien und Punkte des Netzes, und die vier Punkte $A, .. D$, von denen die Construction ausgeht, die vier Hauptpunkte des Netzes heissen.

Es würde nicht nur sehr ermüdend, sondern auch von keinem erheblichen Nutzen seyn, wenn wir, eben so wie in §. 198. bei den ersten Linien des Netzes, auch bei der fortgesetzten Construction desselben in das Einzelne gehen wollten. Dagegen soll uns in den nächsten §§. die Entwickelung mehrerer allgemeiner Eigenschaften des Netzes beschäftigen, die schon an sich merkwürdig genug, besonders aber für die noch vorzutragende fünfte Verwandtschaft von Wichtigkeit sind.

§. 201. Lehrsatz. Sind A, B, C und $D = aA + bB + cC$ die vier Hauptpunkte eines Netzes in einer Ebene, so kann jeder andere Punkt P des Netzes unter einem Ausdrucke von der Form

$$\varphi aA + \chi bB + \psi cC$$

Von der Richtigkeit der beigefügten Ausdrücke wird man sich leicht mittelst der im §. 198. mitgetheilten Formeln I. bis IV. versichern können. So findet sich z. B. der Ausdruck

$$\begin{aligned} 3aA + 2bB + cC &= 2(aA + bB) + (aA + cC) = 2(a+b)C' + (a+c)B' \\ &= 2(aA + bB + cC) + (aA - cC) = -2dD + (a-c)G \\ &= 2aA + (aA + 2bB + cC) = 2aA + (b-d)B''. \end{aligned}$$

Mithin gehört dieser Ausdruck einem Punkte an, der in den drei Geraden $B'C'$, DG und AB'' zugleich enthalten ist.

dargestellt werden, wo φ, χ, ψ rationale Zahlen, Null mit einbegriffen, sind, die nicht von der gegenseitigen Lage der Hauptpunkte, sondern bloss von der Verbindungsart abhängen, durch welche man, von den Hauptpunkten ausgehend, zu P gelangt.

Beweis. Jeder neu hinzukommende Punkt P des Netzes wird erhalten als der Durchschnitt zweier Geraden IK und LM, deren Punkte I, K, L, M schon vorhandene Punkte des Netzes sind. Man nehme nun an, die Ausdrücke dieser vier Punkte seyen von der im Lehrsatze angegebenen Beschaffenheit, und setze daher:

$$(1) \begin{cases} iI = \iota' aA + \iota'' bB + \iota''' cC, \\ kK = \varkappa' aA + \varkappa'' bB + \varkappa''' cC, \\ lL = \lambda' aA + \lambda'' bB + \lambda''' cC, \\ mM = \mu' aA + \mu'' bB + \mu''' cC, \end{cases}$$

wo also $\iota', \iota'', \iota''', \varkappa'$, etc. rationale Zahlen sind. Man eliminire aus diesen vier Gleichungen A, B, C, so gehen auch die damit resp. verbundenen Coëfficienten a, b, c heraus, und man erhält eine Gleichung von der Form:

$$(2) \quad \iota iI + \varkappa kK + \lambda lL + \mu mM = 0,$$

wo $\iota, \varkappa, \lambda, \mu$ Coëfficienten vorstellen, die aus den vorigen $\iota', \iota'', \iota''', \varkappa', \ldots$ sich durch lineäre Gleichungen finden lassen. Es folgt aber aus letzterer Gleichung:

$$\iota iI + \varkappa kK \equiv \lambda lL + \mu mM \equiv P;$$

mithin, wenn man für iI und kK (oder lL und mM) ihre obigen Werthe substituirt, und

$$\iota\iota' + \varkappa\varkappa' = \varphi, \quad \iota\iota'' + \varkappa\varkappa'' = \chi, \quad \iota\iota''' + \varkappa\varkappa''' = \psi \text{ setzt:}$$

$$P \equiv \varphi aA + \chi bB + \psi cC.$$

Sind nun, wie angenommen wurde, $\iota', \iota'', \iota''', \varkappa', \ldots$ rationale Zahlen, so werden es auch ι und $\varkappa$, und folglich auch φ, χ, ψ seyn.

Es lassen sich aber die vier Hauptpunkte A, B, C, D selbst durch Ausdrücke von der angenommenen Form darstellen, indem für A, $\chi = \psi = 0$; etc. und für D, $\varphi = \chi = \psi$ ist. Mithin wird auch dieselbe Form allen aus $A, .. D$ abgeleiteten Durchschnitten, d. h. allen übrigen Punkten des Netzes, zukommen.

Beispiele hierzu liefern die Ausdrücke in §. 198. und in der Note zu §. 200.

Uebrigens sieht man leicht, dass φ, χ, ψ nicht von a, b, c und folglich auch nicht von der gegenseitigen Lage der vier Hauptpunkte abhängen.

§. 202. Zusätze. *a.* So wie der Durchschnitt P der Linien IK und LM den Ausdruck $\iota iI + \varkappa kK$ hatte, eben so wird für den Durchschnitt Q der IK mit irgend einer andern Linie des Netzes der Ausdruck $\iota_{,} iI + \varkappa_{,} kK$ seyn, wo $\iota_{,}$, $\varkappa_{,}$, aus gleichem Grunde wie $\iota, \varkappa$, rational sind. Es folgt aber

aus $P \equiv \iota iI + \varkappa kK \ldots IP : PK = \varkappa k : \iota i$,

und aus $Q \equiv \iota_{,} iI + \varkappa_{,} kK \ldots IQ : QK = \varkappa_{,} k : \iota_{,} i$;

mithin ist $\dfrac{IP}{PK} : \dfrac{IQ}{QK} = (I, K, P, Q) = \dfrac{\varkappa}{\iota} : \dfrac{\varkappa_{,}}{\iota_{,}}$,

also ebenfalls rational, d. h.

Jedes in dem ebenen Netze sich bildende Doppelschnittsverhältniss hat einen rationalen, bloss von der Constructionsart und nicht zugleich von der gegenseitigen Lage der vier Hauptpunkte abhängigen, Werth.

Als Beispiele dienen die in §. 198. gefundenen D.verhältnisse.

b. Sey noch N irgend ein Punkt des Netzes, und daher sein Ausdruck:

$$nN = \nu' aA + \nu'' bB + \nu''' cC,$$

wo ν', ν'', ν''' rationale Zahlen sind. Man eliminire aus dieser Gleichung und den obigen Gleichungen (1) für I, K, L die Punkte A, B, C, so bekommt man:

$$(3)\quad \iota_{,} iI + \varkappa_{,} kK + \lambda_{,} lL + \nu nN = 0,$$

wo, ähnlicherweise wie in (2), $\iota_{,}, \varkappa_{,}, \lambda_{,}, \nu$ rationale Zahlen bedeuten. Setzt man noch $\iota i = i_{,}$, $\varkappa k = k_{,}$, $\lambda l = l_{,}$, so kann man für (2) und (3) auch schreiben:

$$M \equiv i_{,} I + k_{,} K + l_{,} L,$$

$$N \equiv \frac{\iota_{,}}{\iota} i_{,} I + \frac{\varkappa_{,}}{\varkappa} k_{,} K + \frac{\lambda_{,}}{\lambda} l_{,} L.$$

Da nun hierbei $\frac{\iota_{,}}{\iota}, \frac{\varkappa'}{\varkappa}, \frac{\lambda'}{\lambda}$ rational sind, so schliessen wir: Sind I, K, L, M irgend vier Punkte eines ebenen Netzes, von denen keine drei in einer Geraden liegen, so kann jeder andere Punkt N desselben Netzes auch unter dem Ausdrucke eines Punktes dargestellt werden, welcher dem aus I, K, L, M, als Hauptpunkten, hervorgehenden Netze zugehört.

Es folgt nun der umgekehrte Satz von §. 201.

§. 203. Lehrsatz. Sind A, B, C und $D \equiv aA + bB + cC$ vier in einer Ebene gegebene Punkte, von denen keine drei in einer Geraden liegen, und φ, χ, ψ irgend drei in rationalen Verhältnissen zu einander stehende Zahlen, so lässt sich der Punkt der Ebene

$$P \equiv \varphi aA + \chi bB + \psi cC$$

durch fortgesetzte Verbindung der vier erstern Punkte mit geraden Linien finden.

Beweis. Unter der gemachten Voraussetzung, dass die Verhältnisse $\varphi : \chi : \psi$ rational sind, können und wollen wir uns unter φ, χ und ψ bloss ganze Zahlen vorstellen. Nun ergeben sich

1) die Punkte $aA+bB$ und $aA+cC$ (Fig. 44.) als die Durchschnitte der AB mit CD und der AC mit BD (§. 198.).

2) ist der Punkt $2aA+bB+cC$*) $= aA+(aA+bB+cC)=(aA+bB)+(aA+cC)$, und wird daher gefunden als der Durchschnitt der Geraden AD mit der durch $aA+bB$ und $aA+cC$ gelegten Geraden. Verbindet man diesen Punkt mit C und B, so erhält man in den Linien AB und AC die Durchschnitte $2aA+bB$ und $2aA+cC$. Hiermit ergiebt sich

3) der Punkt $3aA+bB+cC=2aA+(aA+bB+cC)=(2aA+bB)+(aA+cC)=(2aA+cC)+(aA+bB)$, als der Durchschnitt zweier der drei Geraden, welche A mit D, $2aA+bB$ mit $aA+cC$, $2aA+cC$ mit $aA+bB$ verbinden. Zieht man von diesem Punkte zwei Gerade nach C und B, so schneiden dieselben die AB und AC in den Punkten $3aA+bB$ und $3aA+cC$, wodurch man

4) den Punkt $4aA+bB+cC$ erhält als den Durchschnitt zweier der vier Geraden: durch A und D, durch $2aA+bB$ und $2aA+cC$, durch $3aA+bB$ und $aA+cC$, durch $3aA+cC$ und $aA+bB$; dieser Durchschnitt mit C und B verbunden, giebt in AB und AC die Punkte $4aA+bB$ und $4aA+cC$.

Auf solche Weise fortgefahren, bekommt man die Punkte $5aA+bB+cC$, $6aA+bB+cC$, etc. also allgemein $\varphi aA+bB+cC$, wo φ jede positive Zahl seyn kann.

Auf ähnliche Art lassen sich nun aus dem Punkte $\varphi aA+bB+cC$ die Punkte $\varphi aA+2bB+cC$, $\varphi aA+3bB+cC$, etc. und allgemein der Punkt $\varphi aA+\chi bB+cC$ ab-

*) Aus Mangel an Raum sind dieser Punkt und die folgenden $3aA+bB+cC$, $4aA+$.., in der Figur nur durch die Ziffern 2, 3, 4 angedeutet worden.

leiten, wo χ wiederum jede positive ganze Zahl vorstellt.

Eben so wird endlich mittelst $\varphi aA + \chi bB + cC$ der Punkt $\varphi aA + \chi bB + \psi cC$ gefunden, was auch ψ für eine positive ganze Zahl ist.

Es bleibt also nur noch übrig, die Construction für einen Punkt anzugeben, bei welchem φ, χ, ψ nicht wie bisher einerlei Zeichen haben. Sey demnach, unter der Voraussetzung, dass φ, χ, ψ positive ganze Zahlen sind, der zu findende Punkt

$$P \equiv \varphi aA + \chi bB - \psi cC.$$

Zuerst suche man den Punkt $\varphi aA + \chi bB + \psi cC$. So wie nun in §. 198. aus den Punkten $A, B, C, aA + bB + cC$ die Punkte $aA - cC$ und $bB - cC$ abgeleitet wurden, eben so wird man aus $A, B, C, \varphi aA + \chi bB + \psi cC$ die Punkte $\varphi aA - \psi cC$ und $\chi bB - \psi cC$, und hiermit den Punkt $\varphi aA + \chi bB - \psi cC$ als den Durchschnitt zweier der drei Linien: durch C und $\varphi aA + \chi bB + \psi cC$, durch B und $\varphi aA - \psi cC$, durch A und $\chi bB - \psi cC$, finden können.

Man erkennt übrigens leicht, dass es ausser den jetzt vorgetragenen Constructionen noch viele andere und in manchen speciellen Fällen ungleich einfachere giebt durch die man zu dem gesuchten Punkte gelangen kann. Indessen sollte hier nur die Möglichkeit der Construction überhaupt, so einfach, als es im Allgemeinen geschehen konnte, dargethan werden.

§. 204. Zusatz. Wir sahen in §. 202. *b.*, dass, wenn zwischen vier Punkten I, K, L, M eines Netzes die Relation statt fand: $M \equiv i_{,}I + k_{,}K + l_{,}L$, jeder andere Punkt N des Netzes in Bezug auf $i_{,}I$, $k_{,}K$, $l_{,}L$ rationale Coëfficienten hatte, also durch einen Ausdruck dargestellt werden konnte, welcher den aus der Verbindung von I,

K, L, M sich ergebenden Punkten zukam. Zu Folge des eben Erwiesenen wird daher N aus I, K, L, M, d. h. von irgend fünf Punkten eines Netzes der eine aus den vier übrigen, durch fortgesetzte Verbindung dieser letztern, auch wirklich gefunden werden können; oder:

Je vier Punkte eines ebenen Netzes, von denen keine drei in einer Geraden liegen, kann man als Hauptpunkte betrachten und durch fortgesetzte Verbindung derselben alle übrigen Punkte des Netzes ableiten.

So muss man z. B. aus den vier Punkten A', B', C', D (Fig. 43.) rückwärts die Punkte A, B, C finden können. Dies wird nach §. 198. 5. durch folgende Verbindungen zu bewerkstelligen seyn:

$$A'D \cdot B'C' \equiv A'', \; B'D \cdot C'A' \equiv B'', \; C'D \cdot A'B' \equiv C'',$$
$$B'C' \cdot B''C'' \equiv F, \; C'A' \cdot C''A'' \equiv G, \; A'B' \cdot A''B'' \equiv H,$$
$$B'G \cdot C'H \equiv A, \; C'H \cdot A'F \equiv B, \; A'F \cdot B'G \equiv C.$$

§. 205. Lehrsatz. Sind A, B, C, D vier in einer Ebene gegebene Punkte, von denen keine drei in einer Geraden liegen, und ist P irgend ein fünfter gegebener Punkt der Ebene, so kann man, durch fortgesetzte Verbindung der vier erstern durch gerade Linien, zu einem Punkte gelangen, der mit dem fünften, P, entweder zusammenfällt, oder von ihm um einen Abstand entfernt ist, der kleiner ist, als jeder gegebene.

Beweis. Seyen D und P, auf A, B, C als F.punkte bezogen:

$$D \equiv aA + bB + cC, \quad P \equiv pA + qB + rC.$$

Man setze $\frac{p}{a} : \frac{q}{b} : \frac{r}{c} = \varphi : \chi : \psi$, so wird

$$P \equiv \varphi aA + \chi bB + \psi cC.$$

Haben nun φ, χ, ψ rationale Verhältnisse zu einander, so kann man nach Anleitung des §. 203. durch fortgesetzte Verbindung der Punkte A, B, C, D zu P selbst gelangen.

Sind aber die Verhältnisse $\varphi : \chi$ und $\chi : \psi$ beide, oder nur eins derselben, irrational, so beschreibe man um P, als Mittelpunkt, mit dem gegebenen Abstande, welcher π heisse, als Halbmesser, einen Kreis (Fig. 45.), und ziehe an diesen von C aus zwei Tangenten CU und CV, welche AB in U und V treffen. Man setze diese Punkte

$$U \equiv aA + ubB, \quad V \equiv aA + vbB.$$

Zwischen zwei Zahlen aber, mögen sie rational oder irrational, und auch noch so wenig von einander verschieden seyn, lassen sich immer eine unendliche Menge rationaler Zahlen einschieben. Sey daher w eine rationale zwischen u und v fallende Zahl, und

$$aA + wbB = tW,$$

so ist W ein zwischen U und V liegender Punkt. (Wird der Kreis von CA oder CB geschnitten, so kann man für W den Punkt A oder B selbst nehmen.) Eine von C nach W gezogene Gerade wird daher den Kreis in zwei Punkten, X und Y, schneiden. Man setze

$$X \equiv tW + xcC, \quad Y \equiv tW + ycC,$$

und sey z eine zwischen x und y fallende rationale Zahl, und

$$tW + zcC \equiv Z,$$

so ist Z ein, zwischen X und Y, folglich innerhalb des Kreises liegender und daher von P um weniger als π abstehender Punkt. (Wird der Kreis von AB geschnitten, so kann W zugleich die Stelle von Z vertreten.) Es ist aber dieser Punkt $Z \equiv tW + zcC \equiv aA + wbB + zcC$, und

kann mithin durch fortgesetztes Ziehen gerader Linien gefunden werden, weil die Verhältnisse $1:w:z$ rational sind.

Um diesen Beweis gegen alle Einwürfe sicher zu stellen, sind noch zwei besondere Fälle in Erwägung zu ziehen.

1) Es wurde stillschweigend angenommen, dass die Gerade CW von C nach einem Punkte W, der in AB zwischen den Durchschnitten U und V der Tangenten mit AB liegt, den Kreis immer schneide. Man sieht aber leicht, dass dieses dann nicht mehr geschieht, wenn der Kreis von der durch C mit AB gezogenen Parallele geschnitten wird, als in welchem Falle eine durch C gelegte und den Kreis schneidende Linie der Linie AB ausserhalb UV begegnet. Um diesen Fall zu beseitigen, hat man nur statt des um P mit π beschriebenen Kreises einen noch kleinern zu nehmen, der in jenem enthalten ist und zugleich ganz auf der einen oder andern Seite der gedachten Parallele liegt.

2) Wenn $\pi > PC$, so ist die vorige Beweisführung nicht nur unmöglich, weil dann der Punkt C innerhalb des Kreises fällt, und daher von ihm keine Tangenten an letztern gezogen werden können, sondern auch unnöthig, weil nun der Punkt C für den gesuchten Z geradezu genommen werden kann.

II. Das Netz im Raume.

§. 206. Seyen A, B, C, D, E fünf beliebige Punkte, von denen keine vier in einer Ebene liegen. Man verbinde sie erstlich zu zweien durch Gerade:

$$AB,\ AC,\ BC,\ AD,\ BD,\ CD,\ AE,\ BE,\ CE,\ DE.$$

Von diesen zehn Geraden kann man sich, des leichtern

Auffassens willen, die sechs ersten als die Kanten einer dreiseitigen Pyramide $ABCD$ (Fig. 46.) vorstellen, die vier letztern aber als Linien, die von einem fünften Punkte E nach den Spitzen der Pyramide gezogen sind. Man verbinde nun die fünf Punkte zu dreien durch Ebenen, welches zehn Ebenen giebt: vier derselben ABC, ABD, ACD, BCD sind die Seiten der Pyramide, und die übrigen sechs gehen durch E und die sechs Kanten der Pyramide. Jede der zehn Geraden erscheint hiermit als der gemeinschaftliche Durchschnitt dreier der zehn Ebenen, z. B. AB, als der Durchschnitt der Ebenen ABC, ABD, ABE. Von den sieben übrigen Ebenen gehen drei, ACD, ACE, ADE, durch den einen Endpunkt A dieser Geraden, drei andere, BCD, BCE, BDE, durch den andern Endpunkt B, die siebente CDE aber schneidet AB in einem noch andern Punkte, den wir mit $[AB]$ bezeichnen wollen. Eben so wird jede der neun übrigen Geraden von der Ebene durch die jedesmal drei übrigen Punkte in einem neuen Punkte geschnitten: die Gerade AC von der Ebene BDE im Punkte $[AC]$; BC von ADE in $[BC]$, u. s. w., und wir erhalten somit zehn neue Punkte:

$$[AB], [AC], [BC], \ldots [DE].$$

Diese zehn Punkte und die erstern fünf, also in Allem funfzehn, sind übrigens in den zehn Ebenen so vertheilt, dass in jeder derselben sieben Punkte liegen; z. B. in der Ebene ABC die sieben Punkte:

$$A, B, C, [AB], [AC], BC], [DE].$$

Legt man jetzt durch je drei der 15 Punkte, welche nicht bereits durch Ebenen verbunden sind, wiederum Ebenen, so erhält man zuerst 15 neue, in deren jede 5 Punkte fallen, nämlich die 3 durch D gehenden Ebenen

$D[AB]\ [AC]\ [BE]\ [CE]$,
$D[BC]\ [AB]\ [CE]\ [AE]$,
$D[AC]\ [BC]\ [AE]\ [BE]$;

und eben so 3 durch jeden der 4 übrigen Punkte A, B, C, E.

Sodann bekommt man noch 20 Ebenen, in deren jeder nur 3 Punkte enthalten sind, nämlich die Seitenflächen der 5 Pyramiden $[AE]\ [BE]\ [CE]\ [DE]$, $[AD]\ [BD]\ [CD]\ [DE]$, etc.

Nach dieser zweiten Verbindung der Punkte durch Ebenen hat man demnach in Allem ein System von 45 Ebenen, und zwar

10 Ebenen, jede mit 7 Punkten,
15 — — — 5 —
20 — — — 3 —;

diejenigen Punkte abgerechnet, welche durch die zweite Verbindung selbst hervorgehen.

§. 207. Das jetzt aus fünf Punkten aufgeführte System von Ebenen ist offenbar dasselbe für den Raum, welches in §. 198. das aus vier Punkten construirte System von Linien für die Ebene war. Die Relationen, welche bei jenem Systeme von Linien statt fanden, werden daher auch bei dem gegenwärtigen, nur um Vieles zusammengesetztern, Systeme von Ebenen auf analoge Weise sich wieder zeigen.

Hierbei ist es aber zuerst sehr merkwürdig, dass diejenigen Relationen, vermöge welcher drei oder mehrere Punkte in einer Geraden liegen, vier oder mehrere Ebenen sich in einem Punkte schneiden, u. s. w., also überhaupt solche Eigenschaften, wobei von keinen Grössenverhältnissen die Rede ist, auch ohne Gebrauch von Grössenverhältnissen, folglich ohne alle Anwendung des Calculs erwiesen werden können; ja, was noch mehr ist,

dass die Eigenschaften von der nämlichen Art, welche wir in §. 198. bei dem Systeme von Geraden in einer Ebene mit Hülfe des Calculs fanden, sich dadurch, dass man auf passende Weise mit der ebenen Figur noch andere Ebenen in Verbindung bringt, gleichfalls aus den Grundeigenschaften der Ebene einfach ableiten lassen.

So wurde in §. 198. dargethan, dass, wenn in ein Dreieck ABC (Fig. 47.) ein anderes IKL einbeschrieben wird, dergestalt, dass die Geraden AI, BK, CL, welche die gegenüberliegenden Spitzen verbinden, sich in einem Punkte, D', schneiden, die Durchschnitte der gegenüberliegenden Seiten, d. h. die Punkte $BC \cdot KL$, $CA \cdot LI$, $AB \cdot IK$ in einer Geraden liegen.

Um nun diesen Satz auf die eben gedachte Art zu beweisen, lege man durch D' eine die Ebene ABC schneidende Gerade, nehme darin willkührlich zwei Punkte D, E, und verbinde den einen derselben, D, mit A, B, C, und den andern, E, mit I, K, L durch Gerade. Weil EI mit DD' und AI, und folglich auch mit AD in einer Ebene liegt, so wird EI die AD schneiden, welches in F geschehe. Eben so schneidet EK die BD in G, und EL die CD in H.

Man lege ferner durch F, G, H eine Ebene, welche die Geraden BC, CA, AB in Punkten schneide, die ich resp. mit (BC), (CA), (AB) bezeichnen will; so liegen diese Punkte, als Punkte in dem Durchschnitte zweier Ebenen, ABC und FGH, in einer geraden Linie. Weil aber G, H mit B, C in einer Ebene liegen, so ist (BC) zugleich der Durchschnitt der Geraden BC und GH. Weil ferner G, H, K, L, als Punkte zweier sich in einem Punkte, E, schneidenden Geraden, in einer Ebene enthalten sind, so sind BC, GH, KL die gegenseitigen Durchschnitte der drei Ebenen $GHKL$, $KLBC$, $BCGH$,

und schneiden sich folglich in einem Punkte. Mithin ist (BC) auch der Durchschnitt der BC und LK. Auf dieselbe Weise ergiebt sich, dass LI sowohl als HF die CA in (CA), und IK sowohl als FG die AB in (AB) schneiden. Mithin liegen die drei Durchschnitte $BC \cdot KL$, $CA \cdot LI$, $AB \cdot IK$ in einer Geraden.

Dass in Fig. 43. auch B'', C'' mit F; C'', A'' mit G; A'', B'' mit H in einer Geraden liegen, lässt sich ohne weiteres mittelst des eben erwiesenen Satzes darthun. Denn nimmt man DBC zum anfänglichen Dreieck, und zieht an die Spitzen desselben, D, B, C, von A aus, Linien, so schneiden diese die gegenüberstehenden Seiten resp. in A', C', B'. Dem Satz zufolge liegen daher $BC \cdot C'B'$, $CD \cdot B'A'$, $DB \cdot A'C'$, d. h. F, C'', B'' in gerader Linie; und auf ähnliche Art hat man bei den übrigen zu verfahren.

Ueberhaupt scheint es, als ob bei diesem auch noch weiter fortgesetzten Systeme gerader Linien, alle Fälle, wo drei oder mehrere Punkte in einer Geraden liegen, oder drei oder mehrere Gerade sich in einem Punkte schneiden, allein schon durch wiederholte Anwendung jenes Satzes erwiesen werden könnten.

§. 208. Der Grund, aus welchem sich die drei Geraden (Fig. 47.)

BC, GH, KL in einem Punkte, (BC),
CA, HF, LI — — — (AC),
AB, FG, IK — — — (AB)

schneiden, kann kurz, als darin bestehend, angegeben werden, dass, wenn von drei Geraden je zwei in einer Ebene liegen, nicht aber alle drei in derselben Ebene enthalten sind, diese drei Linien in einem Punkte zusammentreffen. — Aus demselben Grunde werden sich nun auch

AD, *LG*, *KH* in einem Punkte, welcher (*AD*),
BD, *IH*, *LF* — — — — (*BD*),
CD, *KF*, *IG* — — — — (*CD*)

heisse, schneiden. So wie daher in dem Durchschnitte der Ebenen

ABC und *FGH* die Punkte (*AB*), (*AC*), (*BC*)

liegen, eben so sind in dem Durchschnitte der Ebenen

ABD und *KIH* die Punkte (*AB*), (*AD*), (*BD*),
ACD und *LIG* — — (*AC*), (*AD*), (*CD*),
BCD und *LKF* — — (*BC*), (*BD*), (*CD*)

enthalten. Es fliesst hieraus ganz leicht, dass sämmtliche sechs Punkte (*AB*) (*CD*), und folglich auch die vier Geraden, in denen sich die vier Paare von Ebenen, *ABC* und *FGH*, u. s. w., schneiden, in einer Ebene liegen; also:

Wird in ein Tetraëder ABCD ein Octaëder FGHIKL dergestalt einbeschrieben, dass die sechs Spitzen des letztern in den sechs Kanten des erstern liegen, und dass die drei Geraden FI, GK, HL, welche die gegenüberstehenden Spitzen des Octaëders verbinden, sich in einem Punkte, E, schneiden, so liegen die vier Geraden, in denen die Seiten des Tetraëders von den gegenüberstehenden Seiten des Octaëders geschnitten werden, in einer und derselben Ebene.

Man ziehe noch die Geraden *BE* und *CE*, welche die Ebenen *ACD* und *ABD* resp. in den Punkten *B'* und *C'* schneiden, so liegen *B'*, *C'* mit *B*, *C* in einer Ebene. Ferner liegt *B'* in der Ebene *BDEK*, und daher mit *D* und *K* in einer Geraden, als dem Durchschnitte der Ebenen *BDK* und *ACD*. Eben so liegt *C'* mit *D* und *L* in einer Geraden, und folglich *B'*, *C'* auch mit *K*, *L* (und *D*) in einer Ebene. Folglich sind *BCB'C'*,

$B'C'KL$, $BCKL$ drei Ebenen, welche sich zu zweien in den drei Geraden KL, BC, $B'C'$ schneiden. Mithin müssen diese drei Linien sich in einem Punkte schneiden. Es trafen sich aber die Linien BC und KL im Punkte (BC); in demselben Punkte werden sich daher auch BC und $B'C'$ begegnen.

Wird nun noch die Gerade AE gezogen, welche die Ebene BCD in A' schneide, so ergiebt sich auf dieselbe Weise, dass, so wie $BC \cdot B'C' \equiv (BC)$, auch $AB \cdot A'B' \equiv (AB)$, $AC \cdot A'C' \equiv (AC)$ und $AD \cdot A'D' \equiv (AD)$, $BD \cdot B'D' \equiv (BD)$, $CD \cdot C'D' \equiv (CD)$ ist.

Es folgt hieraus weiter, dass sich die drei Ebenen ABC, $A'B'C'$, FGH in einer und derselben Geraden, in der die drei Punkte (AB), (AC), (BC) enthaltenden, schneiden; und eben so die drei Ebenen BCD, $B'C'D'$, LKF; u. s. w., woraus wir ganz leicht in Verbindung mit dem vorigen Satze folgendes, dem in §. 198. 4. analoge Resultat ziehen.

Wird in ein Tetraëder $ABCD$ ein zweites $A'B'C'D'$ einbeschrieben, so dass die Spitzen des letztern in die Seiten des erstern fallen, und dass die vier Geraden AA', BB', CC', DD' durch die gegenüberstehenden Spitzen beider Tetraëder sich in einem Punkte, E, schneiden, so liegen die vier Geraden, in denen sich die gegenüberstehenden Seiten, BCD und $B'C'D'$, CDA und $C'D'A'$, etc. schneiden, in einer Ebene. Auch sind diese Geraden dieselben, in denen vorhin die Seiten des Tetraëders $ABCD$ von den gegenüberstehenden Seiten des Octaëders $FGHIKL$ geschnitten wurden, wenn der dortige Punkt E mit dem hiesigen E ein und derselbe ist.

§. 209. Alles dieses, was sich durch rein geometrische Betrachtungen ergab, lässt sich auch leicht durch den barycentrischen Calcul finden.

A, B, C, D zu F.punkten genommen, sey $E \equiv aA + bB + cC + dD$, oder, wenn man $a + b + c + d = -e$ setzt:

$$\text{I.} \quad aA + bB + cC + dD + eE = 0.$$

Hieraus fliesst sogleich: $aA + dD \equiv bB + cC + eE \equiv$ dem Durchschnitte F*) der Geraden AD mit der Ebene BCE, also

$$\text{II.} \begin{cases} fF = aA + dD, & iI = bB + cC, \text{ und eben so} \\ gG = bB + dD, & kK = aA + cC, \\ hH = cC + dD, & lL = aA + bB, \\ a'A' = aA + eE, & c'C' = cC + eE, \\ b'B' = bB + eE, & d'D' = dD + eE, \end{cases}$$

wo $f = a + b$, $g = b + d$, u. s. w.

Wir folgern hieraus weiter:

$$fF - gG = kK - iI = a'A' - b'B' = aA - bB,$$
$$fF - hH = lL - iI = a'A' - c'C' = aA - cC,$$
$$\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.}$$

d. h. die vier Geraden FG, KI, $A'B'$, AB schneiden sich in einem Punkte; und eben so die vier Geraden FH, LI, $A'C'$, AC; etc. Wir bezeichneten diese Punkte im Vorigen durch (AB), (AC), etc.; daher

$$\text{III.} \quad (AB) \equiv aA - bB, \quad (AC) \equiv aA - cC, \quad (BC) \equiv bB - cC,$$
u. s. w.

*) Es bedarf nur geringer Aufmerksamkeit, um wahrzunehmen, dass die Punkte

	F,	G,	H,	I,	K,	L
mit	$[AD]$,	$[BD]$,	$[CD]$,	$[BC]$,	$[AC]$,	$[AB]$, (§. 206.)
und	A',	B',	C',	D'	mit den ebendas.	
durch	$[AE]$,	$[BE]$,	$[CE]$,	$[DE]$	bezeichneten Punkten einerlei sind.	

Man vergleiche noch §. 50. *a.* und *b.*, wo die dortigen (AB), (AC), ..., als Bezeichnungen der Punkte, in denen eine Ebene von den sechs F.linien geschnitten wurde, und die dortigen Coëfficienten $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\delta}$ mit den hiesigen (AB), (AC), ... und a, b, c, d einerlei sind.

— Man addire die in II. angegebenen Werthe für fF, gG, hH, so kommt:

$$fF + gG + hH = aA + bB + cC + 3dD = 2dD - eE,$$

(vermöge I.), $\equiv$ dem Durchschnitte der Seite FGH des einbeschriebenen Octaëders mit der Geraden DE, welcher $\varDelta$ heisse.

Eben so giebt die Addition der Werthe für $a'A'$, $b'B'$, $c'C'$:

$$a'A' + b'B' + c'C' = aA + bB + cC + 3eE = 2eE - dD$$

$\equiv$ dem Durchschnitte der Seite $A'B'C'$ des einbeschriebenen Tetraëders mit der Geraden DE, welcher $\varDelta'$ genannt werde.

Wir haben daher

$$D' \equiv dD + eE, \quad \varDelta \equiv 2dD - eE, \quad \varDelta' \equiv dD - 2eE;$$

folglich $\frac{DD'}{D'E} = \frac{e}{d}$, $\frac{D\varDelta}{\varDelta E} = -\frac{e}{2d}$, $\frac{D\varDelta'}{\varDelta' E} = -\frac{2e}{d}$

und $(D, E, D', \varDelta) = -2$, $(D, E, D', \varDelta') = -\frac{1}{2}$.

Um hieraus E zu eliminiren, so ist nach §. 184.:

$$(D, D', E, \varDelta) = 3, \quad (D, D', \varDelta', E) = \frac{2}{3},$$

folglich (§. 185.): $(D, D', \varDelta', \varDelta) = 2$, $(D, \varDelta', D', \varDelta) = -1$; und auf ähnliche Weise erhält man durch Elimination von D:

$$(E, \varDelta, D', \varDelta') = -1.$$

Die gegenseitige Lage der fünf Punkte $E, D, D', \Delta, \Delta'$ lässt sich hiernach sehr leicht durch folgende Construction darstellen. Man nehme in einer Geraden die drei Punkte E, D', Δ (Fig. 47 *.) nach Belieben, und mit D' in einer andern Geraden willkührlich zwei Punkte M und N. Hiermit suche man die Punkte $P \equiv M\Delta \cdot NE$, $Q \equiv ME \cdot N\Delta$, $R \equiv N\Delta \cdot D'P$, $S \equiv M\Delta \cdot D'Q$, so ist $\Delta' \equiv D'E \cdot PQ$ und $D \equiv D'E \cdot RS$. Denn vermöge §. 198. 3. ist alsdann im Dreiecke ΔMN: $(E, \Delta, D', \Delta') = -1$; und im Dreiecke $D'RS$: $(D, \Delta', D', \Delta) = -1$, wie erforderlich.

— Dass dieselben D.verhältnisse in der Linie AE (Fig. 47.) zwischen den Punkten A, E, A' und den Durchschnitten dieser Linie mit den Ebenen FKL und $B'C'D'$ statt finden, und eben so in den Linien BE und CE, leuchtet von selbst ein.

§. 210. Ohne uns bei diesen speciellen Untersuchungen länger aufzuhalten, wollen wir nun das bisherige System von Ebenen, auf dieselbe Art, wie dies im Vorigen bei einem Systeme gerader Linien in einer Ebene geschah, erweitern, indem wir durch je drei der schon gefundenen Durchschnittspunkte, wenn sie noch nicht durch Ebenen verbunden sind, neue Ebenen legen, und so fort ohne Ende.

Ein solches aus fünf Punkten im Raume entstehendes System von Ebenen heisse ein Netz im Raume. Die Ebenen selbst, die Geraden, in denen sich die Ebenen zu zweien, und die Punkte, in denen sie sich zu dreien schneiden, wollen wir Ebenen, Linien und Punkte des Netzes nennen, die fünf Punkte aber, welche der Construction zum Grunde gelegt werden, die fünf Hauptpunkte des Netzes.

Von diesem Netz im Raume sollen nun, eben so wie vorhin von dem ebenen Netze, die allgemeinen Eigenschaften entwickelt werden.

§. 211. Lehrsatz. Sind A, B, C, D und $E \equiv aA + bB + cC + dD$ die fünf Hauptpunkte eines Netzes im Raume, so lässt sich jeder andere Punkt des Netzes unter einem Ausdrucke von der Form

$$\varphi aA + \chi bB + \psi cC + \omega dD$$

darstellen, wo $\varphi, \chi, \psi, \omega$ rationale Zahlen sind, die nicht von der gegenseitigen Lage der fünf Hauptpunkte, sondern bloss von der fortgesetzten Verbindungsart derselben durch Ebenen abhängen.

Beweis. Jeder neue Punkt P des Netzes ergiebt sich als der Durchschnitt dreier Ebenen α, β, γ, von denen jede durch drei schon vorher gefundene Punkte geht, so dass folglich zur Bestimmung von P im Allgemeinen neun Punkte erforderlich sind. Man kann sich aber die Fortsetzung des Netzes noch einfacher auf solche Weise vorstellen, dass jeder neue Punkt als der Durchschnitt einer Geraden durch zwei, und einer Ebene durch drei bereits gefundene Punkte erhalten wird, und daher in Allem nur fünf Punkte zu seiner Bestimmung erfordert werden.

Denn seyen F, G, H die drei schon bekannten Punkte, wodurch die Ebene α bestimmt wird. Hieraus werde erhalten I, als der Durchschnittspunkt der Geraden FG mit der Ebene β, und K als der Durchschnitt von FH mit β; so sind I und K zwei Punkte in der Durchschnittslinie der Ebenen α und β, und mithin der Durchschnittspunkt P aller drei Ebenen α, β, γ einerlei mit dem Durchschnitte der Geraden IK und der Ebene γ.

Werde nun diese letztere durch die drei schon früher erhaltenen Punkte L, M, N bestimmt. Man setze die fünf Punkte I, K, L, M, N:

$$iI = \iota' aA + \iota'' bB + \iota''' cC + \iota'''' dD,$$
$$kK = \varkappa' aA + \varkappa'' bB + \varkappa''' cC + \varkappa'''' dD,$$
$$lL = \lambda' aA + .., \quad mM = \mu' aA + .., \quad nN = \nu' aA + ...$$

Somit hat man fünf Gleichungen, aus denen man, nach Elimination von aA, bB, cC und dD, eine Gleichung von der Form bekommt:

$$\iota iI + \varkappa kK + \lambda lL + \mu mM + \nu nN = 0,$$

deren Coëfficienten $\iota, \varkappa, \lambda, \mu, \nu$ aus den Coëfficienten $\iota', \varkappa', \lambda', \mu', \nu', \iota'', \varkappa'', ...$ durch lineäre Gleichungen bestimmt werden.

Hieraus folgt P, als der Durchschnitt der Geraden IK mit der Ebene LMN:

$$P \equiv \iota iI + \varkappa kK \equiv \lambda lL + \mu mM + \nu nN,$$

und wenn man darin für iI und kK ihre durch aA, bB, cC, dD ausgedrückten Werthe substituirt, und der Kürze willen

$$\iota\iota' + \varkappa\varkappa' = \varphi, \quad \iota\iota'' + \varkappa\varkappa'' = \chi, \quad \iota\iota''' + \varkappa\varkappa''' = \psi, \quad \iota\iota'''' + \varkappa\varkappa'''' = \omega$$

setzt:

$$P \equiv \varphi aA + \chi bB + \psi cC + \omega dD.$$

Sind demnach die Coëfficienten $\iota', \varkappa', \lambda', \mu', \nu', \iota'', \varkappa'', ...$ rational, so haben auch die Coëfficienten $\iota, \varkappa, \lambda, \mu, \nu$, folglich auch $\varphi, \chi, \psi, \omega$ rationale Werthe. Sind folglich die Ausdrücke der fünf Punkte I, K, L, M, N von der im Lehrsatze angezeigten Form, so ist es auch der Ausdruck des neuen durch sie bestimmten Punktes P. Nun kommt aber diese Form den Ausdrücken der fünf Hauptpunkte $A, B, C, D, E \equiv aA + .. + dD$ selbst zu (vergl. §. 201.); mithin auch den Ausdrücken aller daraus abgeleiteten Punkte, d. h. aller übrigen Punkte des Netzes.

§. 212. Zusätze. *a.* Jeder Punkt der Geraden IK, welcher zugleich ein Punkt des Netzes ist, hat einen Ausdruck von der Form $\iota iI + \varkappa kK$, wo ι und $\varkappa$ von einem Punkte zum andern veränderlich und rational sind. Wir folgern hieraus, wie in §. 202. *a.*:

Jedes in dem Netz im Raume sich bildende Doppelschnittsverhältniss ist rational.

b. Jeder in der Ebene LMN begriffene Punkt des Netzes hat einen Ausdruck von der Form: $\lambda lL + \mu mM + \nu nN$, wo λ, μ, ν von einem Punkte des Netzes zum andern veränderlich und rational sind. Durch geradlinige Verbindung irgend vier solcher Punkte müssen daher alle übrigen in die Ebene LMN fallenden Punkte des Netzes abgeleitet werden können (§. 204.); oder:

Das System von Geraden, in welchem eine Ebene eines Netzes im Raume von den übrigen Ebenen des Netzes geschnitten wird, bildet ein Netz in einer Ebene.

c. Sey noch

$$oO = o'aA + o''bB + o'''cC + o''''dD$$

ein Punkt des Netzes im Raume, und daher $o', \ldots o''''$ rational. Eliminirt man aus dieser Gleichung und den obigen Gleichungen für I, K, L, M die F.punkte A, B, C, D, so erhält man für O einen Ausdruck von der Form:

$$O \equiv \iota_{,} iI + \varkappa_{,} kK + \lambda_{,} lL + \mu_{,} mM,$$

wo $\iota_{,}, \ldots \mu_{,}$ rational sind; also einen Ausdruck, welcher den Punkten des Netzes zukommt, das aus den fünf Punkten I, K, L, M und

$$N \equiv \iota iI + \varkappa kK + \lambda lL + \mu mM,$$

als Hauptpunkten, abgeleitet werden kann. (Vergl. §. 202. *b.*). Da nun, wie der folgende §. zeigen wird, nicht nur jeder Punkt dieses Netzes seinem Ausdrucke

nach von einer solchen Form ist, sondern auch umgekehrt jeder Punkt von dieser Form zu dem Netze selbst gehört, so schliessen wir analog mit §. 204.:

Je fünf Punkte eines Netzes im Raume, von denen keine vier in einer Ebene liegen, können als die fünf Hauptpunkte betrachtet, und daraus alle übrigen Punkte durch fortgesetztes Legen von Ebenen gefunden werden.

§. 213. Lehrsatz. Sind A, B, C, D und $E \equiv aA + bB + cC + dD$ fünf gegebene Punkte, von denen keine vier in einer Ebene liegen, so kann man zu jedem sechsten Punkte

$$P \equiv \varphi aA + \chi bB + \psi cC + \omega dD,$$

wenn $\varphi, \chi, \psi, \omega$ in rationalen Verhältnissen zu einander stehen, durch fortgesetzte Verbindung der fünf erstern gelangen.

Beweis. Man lege die Ebene ABC und ziehe die Gerade DE, welche jene im Punkte $D' \equiv aA + bB + cC$ schneidet, so kann man nach §. 203. durch fortgesetzte Verbindung der vier Punkte A, B, C, D' den Punkt $\varphi aA + \chi bB + \psi cC \equiv Q$ finden. Eben so erhält man in der Ebene ABD den Punkt $C' \equiv aA + bB + dD$, als Durchschnitt dieser Ebene mit der Geraden CE, und hieraus durch fortgesetzte Verbindung der vier Punkte A, B, D, C' den Punkt $\varphi aA + \chi bB + \omega dD = R$. Zieht man nun die Geraden DQ und CR, so werden sich diese in dem gesuchten Punkte $P \equiv \varphi aA + \chi bB + \psi cC + \omega dD$ schneiden.

§. 214. Lehrsatz. Sind A, B, C, D, E fünf gegebene Punkte, von denen keine vier in einer Ebene liegen, und ist P ein gegebener sechster, so kann man durch fortgesetzte

Verbindung der fünf erstern mit Ebenen einen Punkt finden, der mit dem sechsten entweder zusammenfällt, oder von ihm um einen Abstand entfernt liegt, der kleiner ist, als jeder gegebene.

Beweis. Seyen, A, B, C, D zu F.punkten genommen,

$$E \equiv aA + bB + cC + dD,\ P \equiv pA + qB + rC + sD.$$

Man setze $\frac{p}{a} : \frac{q}{b} : \frac{r}{c} : \frac{s}{d} = \varphi : \chi : \psi : \omega$,

so wird $P \equiv \varphi aA + \chi bB + \psi cC + \omega dD$.

Sind nun die gegenseitigen Verhältnisse der Coëfficienten $\varphi, \chi, \psi, \omega$ rational, so lässt sich (§. 213.) durch fortgesetzte Verbindung der Punkte A, B, C, D, E ein mit P zusammenfallender Punkt finden.

Sind aber diese Verhältnisse alle oder doch etliche derselben irrational, so beschreibe man um P mit dem gegebenen Abstande, als Halbmesser, eine Kugel, und um dieselbe eine sie einhüllende Kegelfläche, welche D zur Spitze hat. Diese Kegelfläche wird die Ebene ABC in einer Ellipse schneiden, — den Fall ausgenommen, wo die Kugel von der durch D mit ABC parallel gelegten Ebene geschnitten oder berührt wird. Um aber auch in diesem Falle eine Ellipse zu erhalten, nehme man an der Stelle jener Kugel eine andere in ihr enthaltene Kugel, welche von der gedachten Ebene nicht geschnitten oder berührt wird. — Man ziehe nun die Gerade DE, welche die Ebene ABC im Punkte $aA + bB + cC$ trifft, und es lässt sich, ganz so wie in §. 205., darthun, dass es in der Ebene ABC innerhalb jener Ellipse Punkte giebt, in deren Ausdrücken, $zZ = \varphi' aA + \chi' bB + \psi' cC$, φ', χ', ψ' rational sind. Man verbinde ei-

nen solchen Punkt Z mit D durch eine Gerade, so wird diese die Kugelfläche in zwei Punkten M und N schneiden, welche man $M \equiv mdD + zZ$ und $N \equiv ndD + zZ$ setze. Sey nun ω' eine zwischen m und n fallende rationale Zahl, so ist $\omega' dD + zZ$ ein zwischen M und N, folglich innerhalb der Kugel liegender Punkt, folglich ein Punkt, der von P um einen Abstand entfernt ist, welcher kleiner ist, als der gegebene. Zugleich aber ist der Ausdruck dieses Punktes

$$\omega' dD + zZ = \varphi' aA + \chi' bB + \psi' cC + \omega' dD,$$

wo $\varphi', \chi', \psi', \omega'$ rationale Zahlen sind. Mithin kann dieser Punkt zugleich durch fortgesetzte Verbindung der Punkte A, B, C, D, E gefunden werden.

Von Vieleckschnittsverhältnissen.

§. 215. Bezeichnen $A, B, .., aA + bB + ..$ die vier oder fünf Hauptpunkte eines Netzes in einer Ebene oder im Raume, und sind $iI = \iota' aA + \iota'' bB + ..$, $kK = \varkappa' aA + \varkappa'' bB + ..$, wo $\iota', \iota'', .. \varkappa', ..$ rationale Zahlen vorstellen, irgend zwei andere Punkte des Netzes (Fig. 48.), so kann jeder in der Geraden IK enthaltene Punkt des Netzes, $P \equiv \iota iI + \varkappa kK$, oder einfacher $\equiv \iota iI + kK$ gesetzt werden, wo ι eine rationale Zahl ist (§. 202. a. und §. 212. a.). Wir zogen hieraus (ebendas.) den Schluss, dass jedes aus den Punkten eines Netzes entstehende D.verhältniss einen rationalen Werth haben müsse. Dieser Schluss lässt sich aber noch sehr verallgemeinern.

Denn sey $lL = \lambda' aA + \lambda'' bB + ..$ ein beliebiger dritter Punkt des Netzes, also $\lambda', \lambda'' ..$ rational, so wird man auf gleiche Weise einen in die Gerade KL fallenden Netzpunkt, $Q \equiv \varkappa kK + lL$, und einen in der Geraden LI

begriffenen, $R \equiv \lambda lL + iI$ setzen können, wo $\varkappa$ und λ rational sind.

Werden nun diese Ausdrücke für P, Q, R in Proportionen aufgelöst, so kommt:

$$\frac{IP}{PK} = \frac{k}{\iota i}, \quad \frac{KQ}{QL} = \frac{l}{\varkappa k}, \quad \frac{LR}{RI} = \frac{i}{\lambda l},$$

und wenn man diese Proportionen zusammensetzt:

$$[3] \quad \frac{IP}{PK} \cdot \frac{KQ}{QL} \cdot \frac{LR}{RI} = \frac{1}{\iota\varkappa\lambda},$$

d. h. das Produkt aus den drei Verhältnissen, nach welchen die Seiten IK, KL, LI des Dreiecks IKL in P, Q, R geschnitten werden, und welches wir kurz ein Dreieckschnittsverhältniss nennen wollen, ist rational. — Die einfachsten Beispiele hierzu sind die Sätze 1) und 2) in §. 198.

Sey M noch irgend ein anderer Netzpunkt, der, wenn das Netz im Raume enthalten ist, auch ausserhalb der Dreiecksebene IKL liegen kann. Seyen ferner S und T zwei Netzpunkte, welche resp. in den Geraden LM und IM liegen, so wird, aus demselben Grunde wie vorhin, das Dreieckschn.verhältniss

$$\frac{IR}{RL} \cdot \frac{LS}{SM} \cdot \frac{MT}{TI}$$

rational seyn. Multiplicirt man dasselbe in das vorige, also Rationales mit Rationalem, so kommt

$$[4] \quad \frac{IP}{PK} \cdot \frac{KQ}{QL} \cdot \frac{LS}{SM} \cdot \frac{MT}{TI},$$

d. i. das Verhältniss, zusammengesetzt aus den Verhältnissen, nach welchen die Seiten des Vierecks $IKLM$ in P, Q, S, T getheilt werden. Dieses Verhältniss, welches kurz ein Viereckschnittsverhältniss heissen kann, wird daher ebenfalls einen rationalen Werth haben.

Construirt man über der einen Seite dieses Vierecks, z. B. über MI ein neues Dreieck MNI, dessen Spitze N wiederum ein Punkt des Netzes ist, und nimmt in den Seiten desselben MN und NI zwei Netzpunkte U und V, so erhellet nach derselben Schlussart die Rationalität des Fünfeckschnittsverhältnisses:

$$[5] \quad \frac{IP}{PK} \cdot \frac{KQ}{QL} \cdot \frac{LS}{SM} \cdot \frac{MU}{UN} \cdot \frac{NV}{VI};$$

und so fort bei Vielecken von noch mehreren Seiten. Wir stellen daher die allgemeine Erklärung auf:

Ein Vieleckschnittsverhältniss (*ratio sectionalis polygonica*) ist ein Verhältniss, zusammengesetzt aus den Verhältnissen, nach welchen bei einem ebenen oder nicht in einer Ebene enthaltenen Vielecke jede Seite, — den Anfangs- und Endpunkt derselben zum End- und Anfangspunkt der anliegenden Seiten genommen, — von einem beliebigen dritten in der Seite selbst oder in ihrer Verlängerung liegenden Punkte geschnitten wird.

Und nun das Theorem:

Jedes Vieleckschnittsverhältniss, bei welchem sowohl die Spitzen des Vielecks, als die Schneidepunkte der Seiten Punkte eines Netzes in einer Ebene oder im Raume sind, hat einen rationalen Werth.

§. 216. Zusätze. *a.* Als das einfachste Vl.verhältniss ist das Doppelschnittsverhältniss zu betrachten. Schreibt man nämlich das D.verhältniss

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} \text{ unter der Form } [2] \quad \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BD}{DA},$$

so ist es das Product aus den Verhältnissen, nach wel-

chen die zwei Seiten AB und BA eines Zweiecks, erstere in C, letztere in D, geschnitten werden. Ein D.verhältniss könnte man daher auch ein Zweieckschnittsverhältniss nennen.

b. Die Rationalität eines in einem Netze sich bildenden Vl.verhältnisses lässt sich sehr leicht auch dadurch beweisen, dass man es nach und nach auf ein in demselben Netze enthaltenes und folglich rationales D.- oder Zweieckschn.verhältniss reducirt. Denn seyen, wie vorhin, P, Q, R die Schneidepunkte der Seiten des Dreiecks IKL. Man setze $IL \cdot PQ \equiv X$, so ist auch X ein Punkt des Netzes, und nach §. 198. 2.:

$$\frac{IP}{PK} \cdot \frac{KQ}{QL} = - \frac{IX}{XL}.$$

Hierdurch aber reduciren sich die Vl.verhältnisse [3], [4], [5], ... auf:

$$-\frac{IX}{XL} \cdot \frac{LR}{RI}, \quad -\frac{IX}{XL} \cdot \frac{LS}{SM} \cdot \frac{MT}{TI},$$

$$-\frac{IX}{XL} \cdot \frac{LS}{SM} \cdot \frac{MU}{UN} \cdot \frac{NV}{VI},$$

also auf die Formen [2], [3], [4], ..., von denen man nun auf gleiche Weise das zweite und die folgenden auf die Formen [2], [3], ..., und mithin jedes, nach genugsam wiederholter Anwendung dieses Verfahrens, auf die Form [2], d. i. auf ein aus Netzpunkten gebildetes D.verhältniss bringen kann.

c. In dem besondern Falle, wo die Spitzen des Vielecks und folglich auch die Schneidepunkte in eine und dieselbe Gerade fallen, kann ein Vl.verhältniss unmittelbar als ein Product aus D.verhältnissen ausgedrückt werden. Denn alsdann wird

$$[3] = -\left(\frac{IP}{PK}\cdot\frac{KQ}{QI}\right)\left(\frac{IQ}{QL}\cdot\frac{LR}{RI}\right)$$
$$= -(I, K, P, Q)\,(I, L, Q, R),$$

$$[4] = \left(\frac{IP}{PK}\cdot\frac{KQ}{QI}\right)\left(\frac{IQ}{QL}\cdot\frac{LS}{SI}\right)\left(\frac{IS}{SM}\cdot\frac{MT}{TI}\right)$$
$$= (I, K, P, Q)\,(I, L, Q, S)\,(I, M, S, T);$$ u. s. w.

Siebentes Capitel.

Von der Verwandtschaft der Collineation.

§. 217. Die in den ersten Capiteln des gegenwärtigen Abschnitts erklärten vier Verwandtschaften hatten sämmtlich dieses mit einander gemein, dass bei zwei in einer dieser Verwandtschaften stehenden Figuren, — wenn anders nicht jede Figur bloss ein System von Punkten in einer Geraden war, — jeder Geraden der einen Figur eine gerade, nicht krumme, Linie der andern entsprach, und dass folglich bei Figuren im Raume jede Ebene der einen Figur, in der andern Figur gleichfalls eine Ebene zur entsprechenden Fläche hatte. Zu dieser gemeinsamen Eigenthümlichkeit musste, wenn die Figuren einander affin heissen sollten, die Gleichheit der Verhältnisse zwischen sich entsprechenden Theilen der Ebene oder des Raums hinzukommen. Die Affinität war die allgemeinste Verwandtschaft, und es traten daher noch andere Bedingungen hinzu, wenn die Figuren einander gleich, oder ähnlich, oder beides zugleich seyn sollten.

Gegenwärtig soll nun das sich Entsprechen gerader Linien (und Ebenen) als alleiniges Merkmal verwandter Figuren beibehalten, und somit eine Verwandtschaft aufgestellt werden, welche allgemeiner noch als die Affini-

tät, ja die allgemeinste ist, nach welcher in dem Theile der Geometrie, welcher sich bloss mit Geraden und Ebenen beschäftigt, Figuren einander verwandt heissen können. (Bei einer noch allgemeinern Verwandtschaft, — und deren lassen sich unendlich viele denken, — wird einer Geraden eine Curve, und einer Ebene eine krumme Fläche entsprechen).

Das Wesen dieser neuen Verwandtschaft besteht also darin, dass bei zwei ebenen oder körperlichen Räumen, jedem Punkte des einen Raums ein Punkt in dem andern Raume dergestalt entspricht, dass, wenn man in dem einen Raume eine beliebige Gerade zieht, von allen Punkten, welche von dieser Geraden getroffen werden (*collineantur*), die entsprechenden Punkte in dem andern Raume gleichfalls durch eine Gerade verbunden werden können.

Es ist deshalb diese Verwandtschaft die Verwandtschaft der Collineation genannt worden. Figuren, zwischen denen sie statt findet, heissen collinear verwandte, oder schlechthin collineare Figuren.

§. 218. Die Art und Weise, nach der man die Punkte zweier Räume, bloss dem so eben erklärten Gesetze der Collineation gemäss, gegenseitig auf einander beziehen kann, erhellet ganz leicht aus den im vorigen Capitel entwickelten Eigenschaften der geometrischen Netze.

Denn, um mit ebenen Figuren den Anfang zu machen, so entspreche dem Punkte A (Fig. 49.) in der einen Ebene, der Punkt A' in der andern, dem B in der einen, der B' in der andern, und folglich jedem Punkte in der Geraden AB, ein gewisser Punkt in der Geraden $A'B'$. Sey ferner C ein ausserhalb AB befindlicher dritter Punkt in der ersten Ebene, welchem man in der

zweiten einen willkührlich ausserhalb $A'B'$ genommenen Punkt C' entsprechend setze, so wird wiederum jedem Punkte der Geraden AC und BC ein Punkt in den resp. Geraden $A'C'$ und $B'C'$ entsprechen. Welcher Punkt aber in den Linien $A'B'$, $A'C'$ oder $B'C'$ irgend einem gegebenen in den Linien AB, AC oder BC als entsprechend zugehöre, bleibt bis auf die Punkte A, B, C, A',.. selbst noch unbestimmt. Man nehme daher willkührlich noch ein viertes Paar sich entsprechender Punkte, D und D', ausserhalb jener Geraden, und es werden die Punkte der Geraden $A'D'$, $B'D'$, $C'D'$ ihre entsprechenden in den Geraden AD, BD, CD haben. Zugleich aber werden die Durchschnitte dieser Geraden mit den vorigen zu neuen Paaren sich entsprechender Punkte hinführen. Setzt man nämlich:

$$AD \cdot BC \equiv E,\ BD \cdot AC \equiv F,\ CD \cdot AB \equiv G,$$

$$A'D' \cdot B'C' \equiv E',\ B'D' \cdot A'C' \equiv F',\ C'D' \cdot A'B' \equiv G',$$

so muss E', als gemeinschaftlicher Punkt der Geraden $A'D'$ und $B'C'$, dem E, als dem gemeinschaftlichen Punkte der Geraden AD und BC, und aus gleichem Grunde F' dem F, und G' dem G entsprechen.

Man ziehe ferner die Geraden EF, EG, FG und $E'F'$, $E'G'$, $F'G'$, und setze:

$$EF \cdot CD \equiv H,\ EF \cdot AB \equiv I, \text{ etc.}$$

$$E'F' \cdot C'D' \equiv H',\ E'F' \cdot A'B' \equiv I', \text{ etc.}$$

so sind H und H', I und I', etc. sich entsprechende Punkte.

Ganz so, wie im vorigen Capitel, lässt sich nun dieses Verbinden der immer neu entstehenden Durchschnittspunkte in beiden Ebenen ohne Ende fortsetzen, und somit eine unendliche Menge sich entsprechender Punkte finden.

Da man nun, vermöge §. 205., durch fortgesetzte Verbindung von vier Punkten in einer Ebene durch gerade Linien zu jedem gegebenen fünften Punkte in derselben Ebene entweder unmittelbar, oder doch in sofern gelangen kann, dass man einen andern findet, welcher von dem fünften um weniger, als um jeden gegebenen Abstand entfernt ist: so muss sich, nachdem die vier ersten Paare entsprechender Punkte A und A',... nach Belieben bestimmt worden sind, für jeden Punkt P der einen Ebene ein entsprechender P' in der andern angeben lassen; dergestalt nämlich, dass man dieselbe Operation des Ziehens gerader Linien, durch welche man, von A, B, C, D ausgehend, zu P zu gelangen im Stande ist, in der andern Ebene, von A', B', C', D' ausgehend, wiederholt.

§. 219. Jeder Punkt P, den man durch fortgesetzte Verbindung der vier Punkte A, B, C und $D \equiv aA + bB + cC$ findet, hat nach §. 201. einen Ausdruck von der Form: $\varphi aA + \chi bB + \psi cC$, wo φ, χ, ψ bloss von der Art und Weise der fortgesetzten Verbindung und nicht zugleich von a, b, c abhängige Coëfficienten sind. Dem so eben Gesagten zufolge wird daher, $D' \equiv a'A' + b'B' + c'C'$ gesetzt, $P' \equiv \varphi a'A' + \chi b'B' + \psi c'C'$ seyn, wo φ, χ, ψ dieselben Werthe, als in dem Ausdrucke für P, haben. Da nun auch umgekehrt jeder Punkt der Ebene $ABC, \equiv \varphi aA + \chi bB + \psi cC$ gesetzt und nach Angabe der Werthe von φ, χ, ψ durch blosses Ziehen gerader Linien gefunden werden kann, nur mit der Bemerkung, dass, wenn die Verhältnisse dieser Coëfficienten irrational sind, die Anzahl der zu ziehenden Linien unendlich wird, so lassen sich bei der Collineationsverwandtschaft ebener Figuren, entsprechende Punkte auch folgendergestalt barycentrisch definiren:

Werden vier beliebigen Punkten A, B, C, D der einen Ebene, von denen keine drei in einer Geraden liegen, vier beliebige Punkte A', B', C', D' unter der nämlichen Bedingung in der andern Ebene entsprechend angenommen, so entspricht jedem andern Punkte P in der ersten Ebene der Punkt P' in der zweiten, wenn,

$$D \equiv aA + bB + cC, \quad P \equiv pA + qB + rC,$$

$$D' \equiv a'A' + b'B' + c'C', \quad P' \equiv p'A' + q'B' + r'C'$$

gesetzt, sich verhalten:

$$\frac{p}{a} : \frac{q}{b} : \frac{r}{c} = \frac{p'}{a'} : \frac{q'}{b'} : \frac{r'}{c'} \; (= \varphi : \chi : \psi.)$$

Man kann daher auch sagen: in dem allgemeinen Ausdrucke eines Punktes, $\varphi aA + \chi bB + \psi cC$, sind für eine und dieselbe Ebene A, B, C, a, b, c constant, und von einem Punkte der Ebene zum andern φ, χ, ψ veränderlich; dagegen von einer Ebene zur andern A, B, C, a, b, c veränderlich, und für sich entsprechende Punkte verschiedener Ebenen φ, χ, ψ constant.

§. 220. Zusätze. *a.* Hat man die vier Paare sich entsprechender Punkte A und A', B und B', C und C', D und D', festgesetzt, so wird jedem andern Punkte P der Ebene ABC ein Punkt P', und nur einer, in der Ebene $A'B'C'$ entsprechen. Denn mit den Punkten A, B, C, D, P sind die Verhältnisse $a : b : c$ und $\varphi : \chi : \psi$, und mit den Punkten A', B', C', D' die Verhältnisse $a' : b' : c'$ gegeben; folglich sind auch in dem Ausdrucke für P' die Verhältnisse $\varphi a' : \chi b' : \psi c'$, und mithin P' selbst, unzweideutig bestimmt.

b. Ist in den Ausdrücken zweier sich entsprechender Punkte, $\varphi aA + \chi bB + \psi cC$ und $\varphi a'A' + \chi b'B' + \psi c'C'$, die Summe der Coëfficienten des einen $\varphi a + \chi b + \psi c = 0$, so folgt daraus nicht, dass auch $\varphi a' + \chi b' + \psi c' = 0$ ist.

Einem unendlich entfernten Punkte der einen Ebene, d. h. einem solchen, der als der Durchschnitt zweier Parallelen anzusehen ist, wird daher im Allgemeinen nicht ebenfalls ein unendlich entfernter in der andern Ebene entsprechen; und umgekehrt kann es der Fall seyn, dass von den Geraden, welche sich in der einen Ebene in P schneiden, die entsprechenden Geraden in der andern Ebene einander parallel laufen.

c. Bezeichnen φ, χ, ψ gegebene Functionen einer Veränderlichen, so sind $\varphi aA + \chi bB + \psi cC$ und $\varphi a'A' + \chi b'B' + \psi c'C'$ die Ausdrücke zweier sich entsprechenden Linien. Da sich die Coëfficienten dieser Ausdrücke nur durch die Verschiedenheit der in φ, χ, ψ multiplicirten Constanten unterscheiden, so erhellet, dass auch bei der Collineationsverwandtschaft die Ordnung der Linien sich nicht ändert. Wie schon die in §. 217. gegebene Erklärung verlangt, entspricht daher einer Geraden eine Gerade. Ferner wird die einer Linie von der zweiten, dritten, etc. Ordnung entsprechende Linie ebenfalls von der zweiten, dritten, etc. Ordnung seyn. Einer gegebenen Ellipse kann aber nicht nur jede andere Ellipse, wie bei der Affinität (§. 173.), sondern auch jede Hyperbel und jede Parabel entsprechen, oder mit andern Worten: sämmtliche drei Arten von Kegelschnitten sind collinear verwandt. Dies erhellet sogleich daraus, dass sich jedes Kegelschnittes Ausdruck auf die einfache Form $aA + bvB + cv^2C$ bringen lässt (§. 61. IV.), bei der Collin.verwandtschaft aber nicht nur die Punkte $A, B, C,$ sondern auch die Coëfficienten a, b, c von einer Figur zur andern veränderlich sind.

§. 221. In dem allgemeinen Ausdrucke $\varphi aA + \chi bB + \psi cC$ eines Punktes, welcher dem aus den vier Hauptpunkten A, B, C und $aA + bB + cC$ entspringenden ebe-

nen Netze zugehörte, standen φ, χ, ψ in rationalen Verhältnissen zu einander, und alle andern bei dem Netze als rational erwiesenen Verhältnisse waren es deshalb, weil sie, als rationale Functionen solcher Verhältnisse, wie $\varphi:\chi:\psi$, dargestellt werden konnten. Bei der gegenwärtigen Untersuchung, welche sich nicht bloss auf die Netzpunkte, sondern auch auf alle andern Punkte der Ebene erstreckt, sind nun zwar die Verhältnisse $\varphi:\chi:\psi$ nicht mehr rational, zeichnen sich aber dadurch aus, dass sie von einer Ebene zur andern ihre Werthe behalten. Wir können folglich den Schluss machen, dass alle bei dem Netz als rational erwiesenen Verhältnisse, gegenwärtig von einer Ebene zur andern constant sind. Dies berechtigt uns weiter zu nachstehenden Folgerungen:

1) Nach §. 204. können je vier Punkte I, K, L, M eines ebenen Netzes, von denen keine drei in einer Geraden liegen, als Hauptpunkte genommen werden; oder mit andern Worten: ist $M \equiv iI + kK + lL$, und wird irgend ein anderer Punkt des Netzes $P \equiv \iota iI + \varkappa kK + \lambda lL$ gesetzt, so sind die Verhältnisse $\iota:\varkappa:\lambda$ rational. Bezeichnen daher $I, .. M, P$ überhaupt fünf Punkte einer Ebene, und sind $I', .. M', P'$ die ihnen entsprechenden in einer collinearen Figur, so muss, wenn $M' \equiv i'I' + k'K' + l'L'$ gesetzt wird, $P' \equiv \iota i'I' + \varkappa k'K' + \lambda l'L'$ seyn. Sind folglich zwei Figuren nach der in §. 219. gegebenen Erklärung collinear verwandt, so sind sie dies nicht bloss in Bezug auf ein bestimmtes System von vier Paaren sich entsprechender Punkte (A und A', .. D und D'), sondern können auch auf jedes andere System dieser Art (I und I', ... M und M') als collineare Figuren bezogen werden.

Systeme, deren jedes nur aus vier Punkten in einer Ebene besteht, lassen sich stets als collinear verwandt betrachten, — eben so, wie alle Dreiecke einander affin, und alle Systeme von bloss zwei Punkten einander ähnlich sind.

2) Wir haben in §. 202. *a.* gesehen, dass alle D.verhältnisse eines ebenen Netzes rational sind, und schliessen daraus, dass D.verhältnisse zwischen sich entsprechenden Punkten collinearer Figuren gleiche Werthe haben. Sind also A, B, C, D vier Punkte der einen Figur, welche in einer Geraden liegen, und $A', .. D'$ die ihnen entsprechenden und daher gleichfalls in einer Geraden begriffenen Punkte der andern Figur, so ist

$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D');$$

und überhaupt, sind $A, \ldots F$ beliebige sechs Punkte der einen Figur, und $A', \ldots F'$ die ihnen entsprechenden der andern, so ist (§. 190.):

$$(A, B, CD, EF) = (A', B', C'D', E'F').$$

Man setze $AB \cdot CD \equiv M$, $AB \cdot EF \equiv N$, so verhält sich:

$$\left.\begin{array}{l} AM : BM = ACD : BCD, \\ AN : BN = AEF : BEF; \end{array}\right(\text{Vergl. den Beweis zu §. 188.}$$

folglich ist $(A, B, CD, EF) = (A, B, M, N)$

$$= \frac{ACD}{CDB} : \frac{AEF}{EFB},$$

und wir können unsern Satz allgemein verständlich so ausdrücken:

W e r d e n die P u n k t e z w e i e r E b e n e n d e r g e s t a l t a u f e i n a n d e r b e z o g e n, d a s s j e d r e i P u n k t e n d e r e i n e n E b e n e, w e l c h e i n e i n e r G e r a d e n l i e g e n, i n d e r a n d e r n E b e n e d r e i g l e i c h f a l l s i n e i n e r G e r a d e n b e g r i f f e n e P u n k t e e n t s p r e c h e n: s o i s t, w e n n A, B, C, D, E, F be-

liebige sechs Punkte der einen Ebene bezeichnen, das Verhältniss zwischen den Dreiecken

$$\frac{ACD}{CDB} : \frac{AEF}{EFB}$$

dem eben so aus den entsprechenden sechs Punkten der andern Ebene gebildeten Verhältnisse gleich.

Von den zwei Gliedern, woraus dieses Verhältniss zusammengesetzt ist, und welche gleichfalls Verhältnisse sind, ist bei affinen Figuren schon jedes Glied für sich, wie $ACD:CDB$, — und von den zwei Gliedern dieses letztern Verhältnisses, bei gleichen Figuren, ebenfalls jedes für sich, wie ACD, — von der einen Figur zur andern constant. Dieselbe Bemerkung wird sich bei collinearen Figuren im Raume und in geraden Linien wiederholen lassen, und man kann daher die Affinität als eine eben so specielle Art der Collineationsverwandtschaft betrachten, als es die Gleichheit von der Affinität war.

3) Vermöge §. 215. sind auch alle Vieleckschnittsverhältnisse zwischen sich entsprechenden Punkten collinearer Figuren einander gleich.

Vl.verhältnisse können, eben so wie vorhin die D.-verhältnisse, auch durch Verhältnisse zwischen Dreiecken dargestellt werden. Man habe z. B. das Dreieckschnittsverhältniss:

$$\frac{BN}{NC} \cdot \frac{CO}{OA} \cdot \frac{AP}{PB} = \Delta,$$

wo also N mit B und C, O mit C und A, P mit A und B in Geraden liegen. Man ziehe in der Ebene des Dreiecks durch N, O, P willkührlich drei andere Gerade und nehme in diesen nach Belieben die Punkte D, E; F, G; H, I; so dass

$$BC \cdot DE \equiv N, \quad CA \cdot FG \equiv O, \quad AB \cdot HI \equiv P.$$

Da nun alsdann $BN : NC = - BDE : DEC$, etc. so wird

$$\Delta = - \frac{BDE}{DEC} \cdot \frac{CFG}{FGA} \cdot \frac{AHI}{HIB} \cdot$$

Dass dieses Verhältniss, bei welchem $A, \ldots I$ beliebige neun Punkte der Ebene seyn können, dem auf gleiche Art aus den entsprechenden Punkten einer collinearen Figur zusammengesetzten Verhältnisse gleich sey, lässt sich auch dadurch sehr leicht beweisen, dass man es, eben so wie in §. 216. *c.* die Vl.verhältnisse zwischen Punkten in einer Geraden, in ein Product aus D.verhältnissen zerlegt. Es wird nämlich

$$\Delta = - \frac{BDE}{DEC} \cdot \frac{CFG}{FGB} \cdot \frac{BFG}{FGA} \cdot \frac{AHI}{HIB}$$

$$= - (B, C, DE, FG)\ (B, A, FG, HI).$$

Eben so kann man auch bei Viereckschn.verhältnissen, u. s. w. verfahren.

4) Die Collin.verwandtschaft ebener Figuren bestand nach §. 219. in der Beständigkeit der Verhältnisse $\varphi : \chi : \psi$ für jedes Paar sich entsprechender Punkte. Auch diese Verhältnisse können geometrisch nicht anders, als durch D.verhältnisse dargestellt werden. Denn aus

$$D \equiv aA + bB + cC \text{ und } P \equiv \varphi aA + \chi bB + \psi cC$$

folgt $\quad a : b = - BCD : CDA$

und $\quad \varphi a : \chi b = - BCP : CPA,$

mithin $\quad \varphi : \chi = (B, A, CP, CD) = (A, B, CD, CP),$

und eben so $\quad \chi : \psi \quad = (B, C, AD, AP).$

Man kann folglich die Verwandtschaft der Collineation auch geradezu durch die Gleichheit der D.verhältnisse definiren, so dass nämlich zwei ebene Figuren ein-

ander collinear sind, wenn jedes Verhältniss von der Form

$$\frac{ACD}{CDB} : \frac{AEF}{EFB}$$

bei der einen Figur dem eben so aus den entsprechenden Punkten der andern Figur gebildeten Verhältnisse gleich ist.

§. 222. Die Verwandtschaft der Collineation zwischen Figuren im Raume besteht, eben so wie bei ebenen Figuren, in dem gegenseitigen Entsprechen gerader Linien (§. 217.). Dass auch jeder Ebene des einen Raums eine ebene Fläche in dem andern entspricht, ist eine nothwendige Folge hiervon. Denn, sind A, B, C, D vier in einer Ebene begriffene Punkte des einen Raums, und E der unter dieser Voraussetzung statt findende Durchschnitt von AB mit CD, sind ferner $A', \ldots E'$ die diesen fünf Punkten im andern Raume entsprechenden Punkte, so werden auch A', B', E' und C', D', E' in Geraden, und folglich A', B', C', D' in einer Ebene liegen.

Zur deutlichen Darstellung dieses collinearen, von jeder andern Bedingung freien Entsprechens aller in zwei Räumen *) enthaltenen Punkte, und zur Entwickelung der übrigen hierbei vorkommenden Relationen wird uns wiederum das geometrische Netz dienen.

Denn seyen A, B, C, D vier beliebige Punkte, welche nicht in einer Ebene liegen. Man verbinde sie zu dreien durch Ebenen, so schneiden sich diese zu dreien

*) Da jeder dieser Räume unbegränzt gedacht werden muss, und es gleichwohl nur einen unendlichen Raum giebt, so hat man sich die beiden Räume einander durchdringend vorzustellen, wie zwei in einander fallende unendliche Ebenen oder gerade Linien, so dass jeder Punkt die Vereinigung zweier Punkte ist, von denen der eine dem einen und der andere dem andern Raume zugehört.

nur in den vier Punkten selbst, und es wird mithin durch sie allein kein anderer Punkt bestimmt. Kommt aber noch ein fünfter Punkt E hinzu, der mit keinen dreien der vier erstern in einer Ebene liegt, so kann man nach §. 214. durch fortgesetzte Verbindung des nunmehrigen Systems von fünf Punkten nicht nur eine unendliche Menge neuer Punkte erhalten, sondern auch zu jedem gegebenen sechsten Punkte P entweder vollkommen gelangen, oder doch einen andern finden, welcher dem P unendlich nahe liegt und sich daher als mit P identisch betrachten lässt.

Seyen nun A', B', C', D', E' fünf andere Punkte, von denen ebenfalls keine vier in einer Ebene liegen. Man setze sie den fünf vorigen der Reihe nach entsprechend, A' dem A, B' dem B, u. s. w., und denke sich dieselben eben so zu dreien durch Ebenen verbunden und diese Verbindung auf dieselbe Weise fortgesetzt, auf welche man, von A, B, C, D, E anfangend, zu P gelangen konnte, so wird der eben so aus A', B', C', D', E' erhaltene Punkt, welcher P' heisse, der dem P entsprechende seyn. Und somit ist klar, dass, nach Festsetzung der fünf Punkte $A, \ldots E$ in dem einem, und der fünf ihnen entsprechenden $A', \ldots E'$ in dem andern Raume, für jeden sechsten Punkt des einen Raums ein, der Collin.-verwandtschaft gemäss, entsprechender sechster in dem andern Raume sich angeben lassen muss.

§. 223. Sey, wie in §. 211., $E \equiv aA + bB + cC + dD$, $P \equiv \varphi aA + \chi bB + \psi cC + \omega dD$, so sind die Verhältnisse der Coëfficienten $\varphi, \chi, \psi, \omega$ bloss von der Art und Weise abhängig, auf welche man von $A, \ldots E$ durch fortgesetzte Verbindung mit Ebenen zu P kommen kann. Setzt man demnach in dem andern Raume, $E' \equiv a'A' + b'B' + c'C' + d'D'$, so wird der dem P entsprechende Punkt $P' \equiv \varphi a'A'$

$+\chi b'B'+\psi c'C'+\omega d'D'$ seyn. Ganz so wie in §. 219., lassen sich daher collinear verwandte Systeme von Punkten im Raume auch dadurch erklären, dass in dem allgemeinen Ausdrucke eines Punktes, $\varphi aA+\chi bB+\psi cC+\omega dD$, die Punkte A, B, C, D und Coëfficientenverhältnisse $a:b:c:d$ nur für ein und dasselbe System beständig sind, die Verhältnisse aber zwischen den Coëfficienten φ, χ, ψ, ω nur für sich entsprechende Punkte verschiedener Systeme ungeändert bleiben.

§. 224. Zusätze. *a.* Aus dieser Erklärung der entfernten Verwandtschaft durch barycentrische Formeln fliesst eben so, wie in §. 220. *a.* und *b.*, dass, nachdem die den fünf Punkten $A,\ldots E$ entsprechenden fünf $A',\ldots E'$ gewählt worden sind, jedem sechsten Punkte des einen Systems nicht mehr als ein Punkt im andern entsprechen kann, dass aber wohl von zwei sich entsprechenden Punkten der eine ein unendlich entfernter seyn kann, ohne dass es deshalb auch der andere ist.

b. Sind φ, χ, ψ, ω Functionen einer oder zweier Veränderlichen, so stellen $\varphi aA+\chi bB+\psi cC+\omega dD$ und $\varphi a'A'+\chi b'B'+\psi c'C'+\omega d'D'$ zwei collinear verwandte Linien im Raume oder Flächen vor, die daher, nach derselben Schlussart, wie in §. 220. *c.* immer von einerlei Ordnung sind. Uebereinstimmend mit dem Vorigen, entspricht daher einer Geraden eine Gerade, einer Ebene eine Ebene, folglich einem Systeme gerader Linien in einer Ebene ein System von Geraden, welche ebenfalls in einer Ebene begriffen sind. Schneiden sich mehrere Gerade der einen Figur in einem und demselben Punkte, so thun dasselbe die entsprechenden Geraden der andern Figur, können sich aber auch parallel seyn, und umgekehrt entspricht einem Systeme paralleler Geraden ein System von Geraden, die sich im Allgemeinen in einem

Punkte schneiden. Einem Systeme von Ebenen, welche sich in Parallelen schneiden, wird im Allgemeinen ein System von Ebenen entsprechen, welche durch einen und denselben Punkt gehen, und einem Systeme paralleler Ebenen, ein System von Ebenen, welche sich in einer gemeinschaftlichen Geraden schneiden.

c. Was die Flächen der zweiten Ordnung betrifft, so sind diese nicht eben so, wie die Linien der zweiten Ordnung, sämmtlich einander collinear, sondern zerfallen in dieser Hinsicht in zwei Arten, von denen die eine das Ellipsoid, das elliptische Hyperboloid und das elliptische Paraboloid, die andere das hyperbolische Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid in sich begreift.

Um dieses zu zeigen, bringe man zuvor den allgemeinen Ausdruck dieser Flächen

$$A + tB + uC + (it^2 + ktu + lu^2) D \quad (\S.\ 110.)$$

auf eine etwas einfachere Form, indem man den Coëfficienten von D

$$= \frac{1}{4i}(2it + ku)^2 + \frac{1}{4i}(4il - k^2) u^2$$

als das Aggregat zweier Quadrate darstellt. Man setze zu dem Ende $2it + ku = 2ix$, eliminire damit t, nehme hierauf $C, \equiv 2iC - kB$ statt C zum F.punkte und setze noch $(2i - k) u = 2iy$ und

$$1) \quad (4il - k^2) i = (2i - k)^2 m;$$

so erhält man den Ausdruck:

$$\text{I.} \quad A + xB + yC, + (ix^2 + my^2) D.$$

Der Ausdruck einer damit collinear verwandten Fläche ist:

$$aA' + bxB' + cyC' + d(ix^2 + my^2) D',$$

oder einfacher, wenn man $bx = av$, $cy = aw$ und

2) $adi = b^2 i'$, $adm = c^2 m'$ setzt,

II. $A' + vB' + wC' + (i'v^2 + m'w^2) D$.

Aus den Gleichungen 2) folgt nun unmittelbar, dass, wegen der willkührlich zu bestimmenden a, b, c, d, zwischen den Constanten i und m im Ausdrucke I. und den Constanten i' und m' in II. nur insofern eine Beziehung statt findet, als die Verhältnisse $i:m$ und $i':m'$ einerlei Zeichen haben müssen; dass hingegen i' und m' absolut genommen von i und m ganz unabhängig sind. Nach 1) ist aber das Zeichen von $i:m$ einerlei mit dem Zeichen von $4il - k^2$, und letzteres für die vorhin genannten Flächen der ersten Art positiv, für die der zweiten Art negativ (§. 110.). Es sind mithin alle Flächen der ersten Art unter sich, und eben so alle Flächen der zweiten Art unter sich collinear verwandt. (Vergl. d. Anmerk. zu §. 179.

§. 225. Die in §. 221. gemachte Schlussfolge, wonach alle diejenigen Verhältnisse, welche beim Netze rationale Werthe hatten, zwischen sich entsprechenden Punkten collinearer Figuren einander gleich waren, findet auch hier vollkommene Anwendung, und wir erhalten damit folgende, den dortigen ganz analoge Resultate.

1) Die in §. 223. gegebene Erklärung collinear verwandter Figuren im Raume beschränkt sich nicht auf ein bestimmtes System von fünf Paaren sich entsprechender Punkte. — Findet zwischen P und P' auf A und A',...E und E' bezogen, die dort bemerkte Relation statt, so wird eine Relation derselben Art auch bestehen, wenn man P und P' auf irgend fünf andere Paare sich entsprechender Punkte bezieht. (§. 212. c.).

Zwischen Systemen, deren jedes nur fünf Punkte im Raume ausmachen, ist noch keine dergleichen Rela-

tion, und folglich immer Collin.verwandtschaft vorhanden.

2) Alle D.verhältnisse (§. 212. *a.*) und Vl.verhältnisse (§. 215.) zwischen sich entsprechenden Punkten collinearer Figuren im Raume haben gleiche Werthe. Sind also $A, \ldots H$ irgend 8 Punkte der einen Figur, und $A', \ldots H'$ die ihnen entsprechenden in der andern, so ist (§. 196. *b.*)

$$(A, B, CDE, FGH) = (A', B', C'D'E', F'G'H').$$

Man setze $E \equiv aA + bB + cC + dD$ und $AB \cdot CDE \equiv M$, so ist $M \equiv aA + bB$, folglich $AM : MB$, oder das Verhältniss, nach welchem die Gerade AB von der Ebene CDE geschnitten wird, $= b : a = CDEA : BCDE$; und auf eben die Art findet sich, wenn man $AB \cdot FGH \equiv N$ setzt, $AN : NB = FGHA : BFGH$. Hierdurch wird

$$(A, B, CDE, FGH) = \frac{ACDE}{CDEB} : \frac{AFGH}{FGHB},$$

und man bekommt folgenden Satz:

Werden alle Punkte zweier Räume dergestalt auf einander bezogen, dass von je drei Punkten des einen Raums, welche in einer Geraden sind, die entsprechenden Punkte des andern Raums gleichfalls in einer Geraden liegen, so ist das Verhältniss der Pyramiden

$$\frac{ACDE}{CDEB} : \frac{AFGH}{FGHB}$$

aus irgend acht Punkten $A, \ldots H$ des einen Raums, dem eben so aus den entsprechenden acht Punkten des andern Raums gebildeten Verhältnisse gleich.

3) In Betreff der Vl.verhältnisse ist noch zu bemerken, dass diese sich gleichfalls, wie die D.verhältnisse, durch Verhältnisse zwischen Pyramiden ausdrücken lassen. Setzt man z. B. bei dem in §. 221. 3. mit Δ bezeichneten Dr.verhältnisse:

$$N \equiv BC \cdot DEF, \quad O \equiv CA \cdot GHI, \quad P \equiv AB \cdot KLM,$$

so wird $BN : NC = BDEF : DEFC$, etc. und daher

$$\Delta = \frac{BDEF}{DEFC} \cdot \frac{CGHI}{GHIA} \cdot \frac{AKLM}{KLMB}.$$

Auch kann ein solches Verhältniss, eben so wie dort, in D.verhältnisse zerlegt werden; man hat nämlich:

$$\Delta = -\frac{BDEF}{DEFC} \cdot \frac{CGHI}{GHIB} \cdot \frac{BGHI}{GHIA} \cdot \frac{AKLM}{KLMB}$$

$$= -(B, C, DEF, GHI)\,(B, A, GHI, KLM).$$

4) Die Verwandtschaft der Collineation kann endlich, wie bei ebenen Figuren, so auch bei Figuren im Raume durch die Gleichheit aller D.verhältnisse zwischen sich entsprechenden Punkten erklärt werden, indem auch hier die in der Erklärung §. 223. als von einer Figur zur andern constant bemerkten Verhältnisse $\varphi : \chi : \psi : \omega$ geometrisch durch D.verhältnisse sich darstellen lassen. So findet man

$$\varphi : \chi = (A, B, CDE, CDF), \text{ etc.}$$

§. 226. Die Vollständigkeit erfordert es, noch über die Collineationsverwandtschaft solcher Systeme von Punkten Einiges hinzuzufügen, deren jedes bloss in einer Geraden enthalten ist. Weil aus Punkten, die in einer und derselben Geraden liegen, ein Netz zu construiren unmöglich ist, so kann eine Erklärung, derjenigen analog, nach welcher sich bei Systemen in Ebenen und im Raume gerade Linien gegenseitig entsprachen, in diesem Falle zwar nicht gegeben werden. So wie aber bei zwei

sich entsprechenden geraden Linien in zwei ebenen oder körperlichen Räumen, jedes D.verhältniss der einen Linie dem D.verhältniss zwischen den entsprechenden Punkten der andern Linie gleich war, so wird man auch bei zwei isolirten Geraden die Collin.verwandtschaft ihrer Punkte in die Gleicheit der D.verhältnisse zu setzen haben.

Sind demnach $A, B, C, D\ldots$ mehrere Punkte der einen Geraden, und $A', B', \ldots$ die entsprechenden Punkte der andern, so ist bei der Collin.verwandtschaft dieser zwei Systeme

$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D'), \text{ etc.}$$

oder, was dasselbe ausdrückt: setzt man, auf A, B als F.punkte des einen, und A', B' als F.punkte des andern Systems bezogen, $C \equiv aA + bB$, $C' \equiv a'A' + b'B'$, so muss, wenn einer der übrigen Punkte des ersten Systems $P \equiv \varphi a A + \chi b B$ ist, der entsprechende des zweiten Systems $P' \equiv \varphi a' A' + \chi b' B'$ seyn. Denn es folgt hieraus $\varphi : \chi = (A, B, C, P) = (A', B', C', P')$. Dass aber, wenn Q und Q', R und R', S und S' auf gleiche Weise, wie P und P', einander entsprechend genommen sind, auch $(P, Q, R, S) = (P', Q', R', S')$ ist, erhellet schon aus §. 186.

Ich erinnere nur noch, dass alle Systeme, deren jedes bloss aus drei Punkten in einer Geraden besteht, als einander collinear verwandt anzusehen sind.

Construction collinear verwandter Figuren.

§. 227. Aufgabe. Ein System von Punkten in einer Geraden ist gegeben. Ein demselben collinear verwandtes zu construiren.

Auflösung. Heissen bei dieser und den zwei folgenden Aufgaben $A, B, \ldots P, \ldots$ die Punkte, welche das

gegebene System ausmachen, A', B', .. P', .. die ihnen resp. entsprechenden in dem zu construirenden.

Man nehme in einer Geraden a' die drei Punkte A', B', C' nach Willkühr und gebe dieser Linie gegen die Linie a, in welcher die gegebenen Punkte A, B, .., enthalten sind, eine solche Lage, dass A' mit A zusammenfällt, und mithin beide Linien in eine und dieselbe Ebene zu liegen kommen. Man ziehe nun BB' und CC', welche sich in O schneiden, so erhält man für irgend einen andern Punkt P des gegebenen Systems den entsprechenden Punkt P' als Durchschnitt von OP mit a'. — Der Beweis dieses Verfahrens ergiebt sich unmittelbar aus §. 189.

§. 228. Zusatz. Nimmt man O (Fig. 50.) willkührlich, so kann man der Geraden a' immer, und zwar auf doppelte Weise, eine solche Lage geben, dass A', B', C' in OA, OB, OC fallen, wo dann P', eben so wie vorhin, der Durchschnitt von OP mit a' ist. Denn, da die Seiten AA', $A'B'$, $B'B$, BA des Vierecks $AA'B'B$ von der Geraden CC' resp. in O, C', O, C geschnitten werden, so hat man (§. 199. c.)

$$\frac{AO}{OA'} \cdot \frac{A'C'}{C'B'} \cdot \frac{B'O}{OB} \cdot \frac{BC}{CA} = 1.$$

Hiernach ist das Verhältniss $A'O : OB'$ durch die Proportion

$$\frac{AC}{CB} : \frac{A'C'}{C'B'} = \frac{AO}{OB} : \frac{A'O}{OB'}$$

gegeben, und man kann folglich eine Gerade ziehen, welche mit der gesuchten Lage von a' parallel ist. Schneide diese Parallele die OA und OB resp. in A'' und B'', so findet sich OA' als die vierte Proportionallinie zu $A''B''$, $A'B'$ und OA'', wodurch nun die Lage von a' vollkommen, und zwar auf doppelte Weise, bestimmt

wird, indem man OA' in OA auf die eine sowohl als die andere Seite von O tragen kann.

§. 229. Aufgabe. Ein, einem gegebenen Systeme von Punkten in einer Ebene collinear verwandtes, System zu construiren.

Auflösung. Man nehme in dem gegebenen Systeme die Geraden CA und CB als Axen, und beziehe darauf jeden andern Punkt des Systems, indem man ihn mit B und A durch Gerade verbindet und die Durchschnitte dieser Geraden mit den Axen CA und CB angiebt. Sey demnach

$$\text{für } D: \quad CA \cdot BD \equiv M, \; CB \cdot AD \equiv N,$$
$$\text{für } P: \quad CA \cdot BP \equiv X, \; CB \cdot AP \equiv Y.$$

Auf gleiche Art nehme man in dem andern Systeme, das man sich schon construirt denke, $C'A'$ und $C'B'$ zu Axen und projicire darauf aus B' und A' den Punkt D' und jeden der übrigen, P', indem man

$$\text{für } D': \quad C'A' \cdot B'D' \equiv M', \; C'B' \cdot A'D' \equiv N',$$
$$\text{für } P': \quad C'A' . B'P' \equiv X', \; C'B' \cdot A'P' \equiv Y'$$

setzt. Man bestimme nun A', B', C', D' nach Willkühr, so sind damit auch die den Punkten M und N entsprechenden M' und N' bestimmt. Da ferner von den in der Axe $C'A'$ liegenden vier Punkten C', A', M', X', die drei ersten den Punktem C, A, M in CA entsprechen, so kann man nach §. 227. den dem X entsprechenden vierten Punkt X', und eben so in der Axe $C'B'$, aus C', B', N' in Bezug auf C, B, N den dem Y entsprechenden Punkt Y' finden. Hiermit bekommt man endlich $P' \equiv A'Y' \cdot B'X'$.

§. 230. Zusatz. Das einfache Mittel, dessen wir uns bedienten, um zu einem gegebenen Systeme von Punkten in einer Geraden ein collinear verwandtes Sy-

stem zu construiren, und wonach jeder nicht willkührliche Punkt des letztern sich durch Ziehung einer einzigen Geraden ergab, veranlasst zu der Frage, ob nicht ein eben so einfaches Verfahren auch zur Construction collinearer Figuren in Ebenen angewendet werden könne. So viel begreift man leicht, dass, wenn bei zwei Ebenen, die eine beliebige Lage gegen einander haben, von den Punkten der einen Ebene gerade Linien nach irgend einem ausserhalb beider Ebenen befindlichen Punkte O gezogen werden, die Punkte, in denen diese Geraden die andere Ebene treffen, ein den erstern Punkten collineares System bilden werden; weil nach dieser Constructionsart jeder Geraden a der einen Ebene auch eine Gerade a' in der andern entspricht, diejenige nämlich, worin die andere Ebene von der Ebene durch O und a geschnitten wird *). Kann aber auch umgekehrt, wenn beliebigen vier Punkten A, B, C, D der einen Ebene irgend vier Punkte $A', .. D'$ in der andern entsprechend gesetzt sind, der einen Ebene immer eine solche Lage gegen die andere gegeben werden, dass die vier Geraden $AA', .. DD'$, und folglich auch jede fünfte, welche irgend zwei in Bezug auf $A, .. D$ und $A', .. D'$ sich collinear entsprechende Punkte verbindet, durch einen und denselben Punkt O gehen?

*) Bringt man in O das Auge, so erscheint das eine System als eine perspectivische Abbildung des andern. Das auf eine Ebene perspectivisch entworfene Bild einer ebenen Figur steht daher mit letzterer stets in Collinearverwandtschaft.

Wird das Auge unendlich entfernt angenommen, so sind die Figur und ihr Bild einander affin. Haben die beiden Ebenen eine parallele Lage, so findet Aehnlichkeit statt; und wenn in diesem Falle das Auge entweder unendlich entfernt, oder zwischen beiden Ebenen in der Mitte ist, — Gleichheit und Aehnlichkeit.

Um dieses näher zu untersuchen, wollen wir anfänglich nur die drei ersten Paare der sich entsprechenden Punkte berücksichtigen. Heissen die Seiten der von ihnen gebildeten Dreiecke ABC und $A'B'C'$ (Fig. 51.):

$BC=f$, $CA=g$, $AB=h$; $B'C'=f'$, $C'A'=g'$, $A'B'=h'$.

Seyen ferner unter der Voraussetzung, dass sich die drei Geraden AA', BB', CC' in einem Punkte O schneiden:

$OA=x$, $OB=y$, $OC=z$; $OA'=x'$, $OB'=y'$, $OC'=z'$;

so ist nun durch Gleichungen auszudrücken, dass von den zwei Pyramiden, deren Kanten f, g, h, x, y, z und $f', \ldots z'$ sind, die durch die Kanten x, y, z und x', y', z' gebildeten körperlichen Winkel, (oder die Kanten des einen mit den rückwärts verlängerten Kanten des andern,) zur Coïncidenz gebracht werden können, dass folglich die ebenen Winkel yz, zx, xy den Winkeln $y'z'$ etc. resp. gleich sind. Man setze daher in den Dreiecken fyz und $f'y'z'$ die Cosinus der Winkel yz und $y'z'$, durch die Seiten der Dreiecke ausgedrückt, einander gleich, so kommt:

$$y'z'(y^2+z^2-f^2) = yz(y'^2+z'^2-f'^2),$$

oder nach einer leichten Reduction:

$$1) \begin{cases} (yz'-y'z)(yy'-zz') = f^2y'z'-f'^2yz, \text{ u. eb. so} \\ (zx'-z'x)(zz'-xx') = g^2z'x'-g'^2zx, \\ (xy'-x'y)(xx'-yy') = h^2x'y'-h'^2xy, \end{cases}$$

wenn man auch von den Winkeln zx und $z'x'$, xy und $x'y'$ die Cosinus einander gleich setzt. Dies sind also die verlangten Gleichungen, denen die Werthe von x, y, z, x', y', z' Genüge leisten müssen. Weil man drei Gleichungen weniger, als unbekannte Grössen, hat, so können irgend drei der letztern nach Willkühr bestimmt werden, nur mit der Vorsicht, dass die drei übrigen keine unmöglichen Werthe erhalten.

Diese Willkühr wird aber sehr beschränkt, wenn man verlangt, dass noch ein viertes Paar in den Ebenen ABC und $A'B'C'$ beliebig genommener Punkte, D und D', die man

$$dD = aA + bB + cC, \quad d'D' = a'A' + b'B' + c'C'$$

setze, mit O in einer Geraden liegen soll. Die hierzu nöthigen Bedingungsgleichungen lassen sich folgendergestalt finden. Weil $OA = x$, $OA' = x'$, und daher $AO : OA' = -x : x'$, etc. so ist

$$2)\quad O \equiv x'A - xA', \quad O \equiv y'B - yB', \quad O \equiv z'C - zC'.$$

Man multiplicire diese drei Ausdrücke von O resp. mit $\frac{a'}{x}$, $\frac{b'}{y}$, $\frac{c'}{z}$, und addire sie hierauf, so kommt:

$$O \equiv a'\frac{x'}{x}A + b'\frac{y'}{y}B + c'\frac{z'}{z}C - d'D'.$$

Da nun die Gerade $D'O$ die Ebene ABC im Punkte D schneiden soll, so hat man

$$a'\frac{x'}{x}A + b'\frac{y'}{y}B + c'\frac{z'}{z}C \equiv D.$$

Hiermit den vorhin für D angenommenen Ausdruck verglichen, ergiebt sich:

$$\frac{x'}{x} : \frac{y'}{y} : \frac{z'}{z} = \frac{a}{a'} : \frac{b}{b'} : \frac{c}{c'},$$

und die in diesen Verhältnissen begriffenen zwei Gleichungen werden die gesuchten Bedingungen seyn. Um sie mit den obigen Gleichungen 1) in Verbindung zu bringen, setze man:

$$\frac{a}{a'} : \frac{b}{b'} : \frac{c}{c'} = \alpha : \beta : \gamma,$$

und 3) $x' = \alpha ux$, so wird $y' = \beta uy$, $z' = \gamma uz$.

Hierbei sind α, β, γ drei in gegebenen Verhältnissen stehende Zahlen, von denen die eine nach Belieben, z. B. $= 1$, genommen werden kann; u ist eine noch unbekannte, jedoch von dieser Annahme mit abhängige, Zahl. Substituirt man diese Werthe für x', y', z' in den Gleichungen 1), so erhält man:

$$4) \begin{cases} (\beta-\gamma)\,(\beta y^2-\gamma z^2)\,u^2 = f'^2-\beta\gamma f^2 u^2, \\ (\gamma-\alpha)\,(\gamma z^2-\alpha x^2)\,u^2 = g'^2-\gamma\alpha g^2 u^2, \\ (\alpha-\beta)\,(\alpha x^2-\beta y^2)\,u^2 = h'^2-\alpha\beta h^2 u^2; \end{cases}$$

und man muss nun die vier Unbekannten u, x, y, z auf eine, diese drei Gleichungen befriedigende, Weise zu bestimmen suchen. Die erste dieser Unbekannten, u, lässt sich unabhängig von den drei übrigen darstellen. Denn addirt man die Gleichungen, nachdem man sie vorher resp. mit $\beta-\gamma$, $\gamma-\alpha$, $\alpha-\beta$ dividirt hat, so kommt:

$$\frac{f'^2-\beta\gamma f^2u^2}{\beta-\gamma}+\frac{g'^2-\gamma\alpha g^2u^2}{\gamma-\alpha}+\frac{h'^2-\alpha\beta h^2u^2}{\alpha-\beta}=0.$$

Auch zeigt sich bald, dass der hieraus folgende Werth von u^2 immer positiv, u selbst also immer möglich seyn muss. Es wird nämlich, wenn man in den gegebenen Dreiecken fgh und $f'g'h'$ statt der Seiten h, h' die ihnen gegenüberstehenden Winkel einführt, und diese $= \mu$, μ', und folglich $h^2 = f^2 + g^2 - 2fg\cos\mu$, $h'^2 = f'^2 + g'^2 - 2f'g'\cos\mu'$ setzt:

$$u^2 = \frac{(\alpha-\gamma)^2 f'^2 + (\beta-\gamma)^2 g'^2 - 2(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma) f'g'\cos\mu'}{(\alpha-\gamma)^2\beta^2 f^2 + (\beta-\gamma)^2\alpha^2 g^2 - 2(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\alpha\beta fg\cos\mu}.$$

Von diesem Bruche ist aber der Zähler = dem Quadrate der Seite eines Dreiecks, in welchem die zwei andern Seiten $= (\alpha-\gamma)f'$, $(\beta-\gamma)g'$, und der von ihnen eingeschlossene Winkel $= \mu'$; folglich ist der Zähler

immer positiv, und aus gleichem Grunde auch der Nenner.

Nachdem man nun u gefunden hat, kann man von den drei Linien x, y, z die eine, z. B. x, immer und auf unzählige Arten so annehmen, dass die beiden andern Linien aus den Gleichungen 4) bestimmte mögliche Werthe erhalten. Mittelst der Gleichungen 3) lassen sich dann auch x', y', z' finden, und die Figur kann construirt werden.

Unsere Aufgabe ist daher im Allgemeinen immer und auf unendlich viele Arten zu lösen möglich. Um den geometrischen Zusammenhang dieser Lösungen aufzufinden, bemerke man, dass mit der nicht nach Willkühr bestimmbaren Zahl u zugleich die Linie gegeben ist, in der sich die Ebenen ABC und $A'B'C'$, welche der Kürze willen ε und ε' heissen, schneiden müssen. — Aus den Formeln 2), mit 3) verbunden, folgt:

$$(1-\beta u)\,O \equiv B' - \beta u B,\quad (1-\gamma u)\,O \equiv C' - \gamma u C,$$

und hieraus nach Elimination von O:

$$\frac{\beta}{1-\beta u}B - \frac{\gamma}{1-\gamma u}C \equiv \frac{1}{1-\beta u}B' - \frac{1}{1-\gamma u}C'$$

$\equiv$ dem Durchschnitte der Linien BC und $B'C'$; eben so findet sich der Durchschnitt von CA mit $C'A'$

$$\equiv \frac{\alpha}{1-\alpha u}A - \frac{\gamma}{1-\gamma u}C \equiv \frac{1}{1-\alpha u}A' - \frac{1}{1-\gamma u}C'.$$

Da nun diese zwei Punkte, (so wie auch die vier übrigen Punkte $AB\cdot A'B'$, $AD\cdot A'D'$, $BD\cdot B'D'$, $CD\cdot C'D'$,) offenbar in der Durchschnittslinie der Ebenen ε und ε' liegen, so ist der Ausdruck dieser Linie, bezogen

auf A, B, C: $\dfrac{\alpha}{1-\alpha u}A + \dfrac{\beta v}{1-\beta u}B - \dfrac{\gamma(1+v)}{1-\gamma u}C$

$$\text{auf } A', B', C' : \frac{1}{1-\alpha u} A' + \frac{w}{1-\beta u} B' - \frac{1+w}{1-\gamma u} C',$$

wo v und w die Veränderlichen sind.

Haben daher die beiden Ebenen die verlangte gegenseitige Lage, so werden sie sich in dieser Linie schneiden. Der Winkel, unter dem dies geschieht, kann jeder beliebige seyn. Dies folgt schon daraus, dass x immer willkührlich bestimmt werden kann, lässt sich aber auch durch eine einfache geometrische Betrachtung darthun. Wenn nämlich die zwei Linien AA' und BB' bei einer gewissen Lage der Ebenen ε und ε' sich treffen, so werden sie sich zu treffen fortfahren, auch wenn die eine oder beide Ebenen um ihre Durchschnittslinie $\varepsilon\varepsilon'$, als um eine Axe, gedreht werden; aus dem Grunde, weil, wenn AA' und BB' sich treffen, AB und $A'B'$ in $\varepsilon\varepsilon'$ sich begegnen müssen, und umgekehrt. Aus demselben Grunde wird auch jedes andere Paar der vier Linien $AA', .. DD'$ sich zu treffen fortfahren, wenn dieses bei der anfänglichen Lage der beiden Ebenen geschieht. Mit Anwendung der in §. 208. gebrauchten Schlussfolge müssen daher die vier Linien $AA', .. DD'$ immer in Einem, bei der Axendrehung der Ebenen ebenfalls fortrückenden *), Punkte O zusammentreffen.

Weil u nicht unmittelbar, sondern u^2 gefunden wurde, folglich u zwei gleiche aber entgegengesetzte Werthe hat, so wird es noch eine zweite Linie geben, in welcher sich die beiden Ebenen auf eine die Aufgabe befriedigende Weise schneiden können. Die Ausdrücke dieser zweiten Linie finden sich, wenn man in den Ausdrücken

*) Es ist leicht zu erweisen, dass, wenn nur die eine Ebene beweglich genommen wird, der Punkt O einen auf der Axe $\varepsilon\varepsilon'$ perpendicularen Kreis beschreibt.

der ersten $-u$ statt u setzt. Geometrisch kann man die zweite Linie aus der ersten ableiten, wenn man in den vier Linien $OA, .. OD$ die Abschnitte $OA', .. OD'$ von O auf die entgegengesetzte Seite nach $A'', .. D''$ trägt, so dass $A''A' = 2OA'$, etc. Denn alsdann wird das System der vier Punkte $A'', .. D''$ gleichfalls in einer Ebene liegen, und dem Systeme der vier Punkte $A', .. D'$ gleich und ähnlich seyn. Diese Ebene wird folglich die Ebene ε', nur in einer andern Lage, vorstellen, in einer Lage, die mit der ersten offenbar parallel ist; und der Durchschnitt der Ebene ε' in dieser zweiten Lage mit der unverändert gebliebenen Ebene ε wird die gesuchte zweite Linie seyn, die daher in jeder der beiden Ebenen mit der ersten Linie gleichfalls parallel seyn muss. Dieser Parallelismus der beiden Linien giebt sich auch zu erkennen, wenn man den unendlich entfernten Punkt derselben sucht (§. 41.). Aus den obigen Ausdrücken der Linien folgt der Ausdruck dieses Punktes, bezogen

auf A, B, C: $\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right) A + \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\alpha}\right) B + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) C,$

auf A', B', C': $(\beta - \gamma) A' + (\gamma - \alpha) B' + (\alpha - \beta) C',$

ist mithin von u ganz unabhängig, bleibt also derselbe, mag u positiv oder negativ genommen werden.

Das Ergebniss der bisherigen Untersuchung ist demnach folgendes:

Hat man zwei Ebenen ε und ε', und in jeder derselben vier Punkte: A, B, C, D in ε und $A', .. D'$ in ε', so kann man den Ebenen im Allgemeinen immer und auf unendlich viele Arten eine solche gegenseitige Lage geben, dass sich die vier Linien AA', BB', CC', DD' in Einem Punkte schneiden. Es lassen sich nämlich in jeder der beiden Ebenen zwei Parallellinien ziehen, die

Parallelen p und q in ε, p' und q' in ε', von der Beschaffenheit, dass, — wenn man die vier Punkte jeder Ebene für sich paarweise durch (sechs) Gerade verbindet und die Durchschnitte dieser Geraden mit den zwei Parallelen der jedesmaligen Ebene bestimmt, — das System der 6 Durchschnitte mit p dem Systeme der gleichnamigen Durchschnitte mit p', und eben so das System der 6 Punkte in q dem der 6 Punkte in q' gleich und ähnlich ist. Bringt man nun die beiden Ebenen in eine solche Lage, dass die 6 Punkte in p mit den gleichnamigen in p', oder die 6 Punkte in q mit den gleichnamigen in q' zusammenfallen, so werden sich, welches auch die gegenseitige Neigung der Ebenen seyn mag, (auch können sie beide in einander fallen,) die vier Linien AA', .. DD' in einem Punkte vereinigen.

Anmerkungen. Diesem Resultate zufolge kann also von je zwei ebenen Vierecken, und mithin von je zwei collinear verwandten ebenen Figuren überhaupt, die eine von der andern im Allgemeinen immer als perspectivische Abbildung betrachtet werden.

Ein Fall, welcher hierbei noch eine besondere Erwähnung verdient, ist der, wenn die zwei Figuren $A..D$ und $A'..D'$ einander affin sind. Alsdann verhalten sich (§. 145.) $a:b:c = a':b':c'$, woraus nach den obigen Rechnungen weiter folgt: $\alpha = \beta = \gamma$; $f:g:h = f':g':h'$; $x:y:z = x':y':z'$. Sind daher $A..D$ und $A'..D'$ affine Figuren, so müssen sie einander zugleich ähnlich seyn, und ihre Ebenen einander parallel gelegt werden, wenn eine Vereinigung der vier Linien AA', ... statt haben soll. Sind aber die Figuren einander bloss affin, so ist ein Zusammentreffen der vier Linien entweder durchaus unmöglich, oder doch nur ein Zusammentreffen im Unendlichen, d. h. gegenseitiger Parallelismus derselben zu bewerkstelligen. Es lässt sich nämlich zeigen, dass die gleichnamigen Spitzen zweier Dreiecke ABC und $A'B'C'$ nur dann durch Parallelen verbunden werden können, und dass folglich von zwei affinen Figuren $A..D..$ und $A'..D'..$ die eine, als Projection der andern durch Parallelen, nur in dem Falle gelten kann, wenn, $f, g, h, f', ..$ in der vorigen Bedeutung genommen und $f'^2 - f^2 = i$, $g'^2 - g^2 = k$, $h'^2 - h^2 = l$ gesetzt, $i^2 + k^2 + l^2 - 2(kl + li + ik)$ eine positive Grösse ist.

§. 231. Aufgabe. Ein, einem gegebenen Systeme von Punkten im Raume collinear verwandtes, System zu construiren.

Auflösung. Seyen $A, \ldots E$ fünf Punkte des gegebenen Systems, von denen keine vier in einer Ebene liegen. Man nehme die Linien DA, DB, DC zu Axen, also D zum gemeinschaftlichen Anfangspunkt und A, B, C zu den Endpunkten derselben, und beziehe auf sie jeden andern Punkt des Systems, indem man für jede Axe den Punkt angiebt, in welchem sie von einer durch die Endpunkte der beiden andern Axen und durch den zu bestimmenden Punkt gelegten Ebene geschnitten wird. Hiernach werde bestimmt:

E durch $DA \cdot BCE \equiv M$, $DB \cdot CAE \equiv N$, $DC \cdot ABE \equiv O$,
P durch $DA \cdot BCP \equiv X$, $DB \cdot CAP \equiv Y$, $DC \cdot ABP \equiv Z$.

Dasselbe Verfahren denke man sich in dem andern Systeme wiederholt, und bezeichne die den Punkten M, N, O, X,.. entsprechenden Punkte durch M', N', O', X',.., dass also $M' \equiv D'A' \cdot B'C'E'$, etc.

Man nehme nun $A', B', \ldots E'$ willkührlich, jedoch so, dass keine vier derselben in einer Ebene liegen. Alsdann sind von den vier Punkten D', A', M', X', welche in einer Geraden liegen und den gegebenen Punkten D, A, M, X entsprechen, die drei erstern ebenfalls bekannt, und man kann folglich nach §. 227. den vierten X' finden. Auf eben die Art erhält man auch Y' und Z' in den Geraden $D'B'N'Y'$ und $D'C'O'Z'$, woraus sich zuletzt P' als der gemeinschaftliche Durchschnitt der drei Ebenen $B'C'X'$, $C'A'Y'$, $A'B'Z'$ ergiebt.

§. 232. Zusatz. Der Beweis für die Richtigkeit dieser Construction und des in §. 229. bei ebenen Figuren gelehrten Verfahrens beruhet darauf, dass bei zwei

collinear verwandten ebenen Figuren je vier Punkte der einen, für sich betrachtet, von den ihnen entsprechenden vier Punkten der andern im Allgemeinen ganz unabhängig sind, dass eben so bei zwei collinearen Figuren im Raume zwischen je fünf Punkten der einen und den entsprechenden fünf Punkten der andern noch keine Beziehung statt findet, und dass endlich die zwei oder drei D.verhältnisse, wodurch jeder andere Punkt der gegebenen Figur in Bezug auf die ersten vier oder fünf Punkte vollkommen bestimmt wird, in der zu construirenden Figur von gleicher Grösse gemacht wurden.

Nimmt man die vier oder fünf ersten Punkte der zu construirenden Figur nicht willkührlich, sondern lässt sie, als ein System für sich, zu den vier oder fünf ersten Punkten der gegebenen Figur in einer der früher erklärten näheren Verwandtschaften stehen, so ist klar, dass auch die ganze nach den vorhin gegebenen Regeln construirte Figur der gegebenen Figur auf dieselbe Art näher verwandt seyn wird. Lässt man z. B. bei der Construction einer collinearen ebenen Figur das Viereck $A'B'C'D'$ dem Viereck $A..D$ ähnlich seyn, so wird auch zwischen den ganzen Figuren Aehnlichkeit obwalten.

Dasselbe wird endlich auch von collinear verwandten Systemen in geraden Linien gelten, wo, wenn zwischen drei Punkten des einen und den entsprechenden drei Punkten des andern Systems eine nähere Verwandtschaft statt findet, dieselbe sich gleichfalls auf die ganzen Systeme erstrecken wird.

Achtes Capitel.

Von den aus der Verwandtschaft der Collineation entspringenden Aufgaben.

§. 233. **Lehrsatz. Hat man ein System von n Punkten in einer Geraden, oder in einer Ebene, oder im Raume, und sind von den daraus zu bildenden Doppel- und Vieleckschnittsverhältnissen resp. irgend $n-3$, $2n-8$, $3n-15$ von einander unabhängige gegeben, so kann man hiermit alle übrigen finden.**

Beweis. Der erste Fall, wo die Punkte in einer Geraden liegen, und wenn die gegebenen Verhältnisse D.verhältnisse sind, ist schon in §. 187. bewiesen worden. Dass der Satz auch für Vl.verhältnisse gilt, folgt aus §. 216. c.

Wenn zweitens die Punkte in einer Ebene enthalten sind, so setze man, wie in §. 219., zwischen vier Punkten des Systems, $A, .. D$, von denen keine drei in einer Geraden liegen, die Relation fest: $aA + bB + cC \equiv D$, und bringe den Ausdruck jedes der $n-4$ übrigen Punkte auf die Form $\varphi aA + \chi bB + \psi cC$, so dass jeder dieser Punkte in Bezug auf die vier ersten durch zwei solcher Verhältnisse, wie $\varphi : \chi$ und $\chi : \psi$, und folglich alle $n-4$ Punkte durch $2(n-4)$ solcher Verhältnisse bestimmt sind. Nach §. 221. sind aber alle D.- und Vl.verhält-

nisse des Systems Functionen dieser $2n-8$ Verhältnisse; es muss daher auch aus irgend $2n-8$ von einander unabhängigen D.- und Vl.verhältnissen des Systems jedes andere Verhältniss dieser Art gefunden werden können.

Eben so wird endlich der Beweis für den dritten Fall geführt, wo, $E \equiv aA + .. + dD$ gesetzt, jeder der $n-5$ übrigen Punkte, $F, G, \ldots$ durch drei solcher Verhältnisse, wie $\varphi:\chi$, $\chi:\psi$, $\psi:\omega$, und folglich alle $n-5$ Punkte durch $3(n-5)$ solcher Verhältnisse in Bezug auf die fünf ersten bestimmt werden. Von diesen Verhältnissen aber können alle in dem Systeme vorkommenden D.- und Vl.verhältnisse als Functionen dargestellt werden (§. 225.).

§. 234. Zusätze. *a.* Bei einem Systeme von 4, 5, 6, 7, 8, 9, ... Punkten in einer Ebene müssen also 0, 2, 4, 6, 8, 10, ... D.- (und Vl.)verhältnisse gegeben seyn, um daraus alle übrigen bestimmen zu können.

Bei einem Systeme von bloss vier Punkten in einer Ebene wird daher noch kein D.verhältniss als gegeben erfordert; d. h. alle D.verhältnisse, welche sich bilden, indem man die vier Punkte durch Gerade verbindet und dieselbe Verbindung mit den dadurch entstehenden Durchschnittspunkten, so weit als man will, fortsetzt, sind bloss von der Art und Weise der Verbindung abhängig, wie dieses bereits aus §. 202. *a.* bekannt ist. Auch haben alle dergleichen D.verhältnisse rationale Werthe.

Construirt man ähnlicherweise ein geometrisches Netz aus fünf Punkten in einer Ebene, statt aus vieren, so reicht zur Bestimmung aller darin vorkommenden D.verhältnisse nicht mehr die Kenntniss der Verbindungsart hin, durch welche man, von den fünf Punkten ausgehend, zu den, irgend eines dieser D.verhältnisse bildenden, Punkten gelangt; sondern es müssen noch irgend

zwei von einander unabhängige D.verhältnisse selbst gegeben seyn. — Bei dem geometrischen Netze, welchem sechs beliebig in einer Ebene genommene Punkte zum Grunde liegen, lassen sich aus irgend vier von einander unabhängigen D.verhältnissen die Werthe aller andern ableiten; u. s. w.

Man wird übrigens schon wahrgenommen haben, dass der eben erläuterte Satz eine Verallgemeinerung des im §. 192. erwiesenen ist, indem dort nur von denjenigen D.verhältnissen die Rede war, welche bei einem Systeme *n* gerader Linien in einer Ebene in und von diesen Linien selbst gebildet wurden, hier aber bei einem Systeme von *n* Punkten in einer Ebene, wodurch ebenfalls nur *n* von einander unabhängige Gerade bestimmt werden, die Rechnung nicht bloss auf diese beschränkt ist, sondern auf alle Linien des aus den *n* Punkten zu construirenden Netzes ausgedehnt werden kann.

b. Aehnliche Bemerkungen lassen sich über den Lehrsatz des vor. §. machen, insofern er Systeme im Raume betrifft, und wo er als eine Erweiterung des Satzes in §. 194. erscheint. Bei einem Systeme von 5, 6, 7, 8, 9, ... Punkten ist hier die Anzahl der erforderlichen D.verhältnisse = 0, 3, 6, 9, 12, ...

Der abgekürzte barycentrische Calcul. = proj. Koord.

§. 235. Da die Collin.verwandtschaft eine Verallgemeinerung der Affinität ist, und alles dasjenige, was eine Figur mit einer ihr collinear verwandten gemein hat, zugleich jeder ihr affinen Figur gemeinschaftlich zukommt; da ferner alle aus der Affinität entspringenden Aufgaben mit Hülfe des barycentrischen Calculs sich lösen lassen: so müssen auch alle durch die Collin.verwandtschaft begründeten Aufgaben mittelst barycentri-

scher Formeln in Rechnung gesetzt und gelöst werden können. Es lässt sich aber bei dieser letztern Art von Aufgaben die barycentrische Rechnung bedeutend abkürzen, dadurch nämlich, dass man die Coëfficienten der Punkte nur aus solchen Zahlen bestehen lässt, die in jeder Figur, welche mit der gegebenen collinear verwandt ist, dieselben bleiben. Hierdurch geschieht es, dass in demselben Grade, in welchem von der einen Seite wegen der zusammengesetztern Verhältnisse die Untersuchung erschwert scheint, sie von der andern Seite durch Abkürzung der Formeln erleichtert wird.

Der Zweck dieses abgekürzten Calculs ist demnach die Entwickelung aller derjenigen Eigenschaften einer Figur, welche sie mit jeder ihr collinear verwandten Figur, als solchen, gemein hat. Bei den durch diesen Calcul zu lösenden Aufgaben und zu erweisenden Lehrsätzen kann daher von keinen andern Grössenverhältnissen, als D.- und Vl.verhältnissen, und, wenn nur geradlinige und ebenflächige Figuren untersucht werden, von keinen andern Bedingungen, als solchen die Rede seyn, dass drei oder mehrere Punkte in einer Geraden liegen, zwei oder mehrere Gerade sich in einem Punkte, drei oder mehrere Ebenen in einer Geraden treffen, u. dergl.; da hingegen die einfachen Verhältnisse zwischen Abschnitten einer Geraden, oder zwischen Flächentheilen einer Ebene, oder zwischen Theilen des Raums mittelst des abgekürzten Calculs eben so wenig berücksichtigt werden können, als er die Fälle, wo der Durchschnittspunkt von Geraden oder die Durchschnittslinie von Ebenen im Unendlichen liegt, und daher jene Geraden und diese Ebenen einander parallel laufen, besonders anzuzeigen vermag (§. 220. *b.* und §. 224. *a. b.*).

Wir wollen nunmehr die drei Arten räumlicher Ausdehnung einzeln durchgehen, und mit der geraden Linie den Anfang machen.

§. 236. Man habe ein System von Punkten, A, B, C, D, E,..., welche in einer Geraden liegen. A und B zu F.punkten genommen, seyen die übrigen Punkte durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$aA + bB + cC = 0, \quad \delta aA + \delta' bB + dD = 0, \quad \varepsilon aA + \varepsilon' bB + eE = 0, \text{ etc.},$$

wo also $a + b + c = 0$, $\delta a + \delta' b + d = 0$, etc. Alsdann sind es, nach §. 226., nur die Verhältnisse $\delta : \delta'$, $\varepsilon : \varepsilon'$, etc., welche dieses System von Punkten mit allen andern ihm collinear verwandten gemein hat, während das Verhältniss $a : b$ von dem einem dieser Systeme zu dem andern veränderlich ist. Man lasse demnach gegenwärtig die Coëfficienten a, b und die davon abhängigen c, d, e, ..., als solche, die nicht weiter in Rechnung kommen, hinweg und schreibe:

$$A + B + C = 0, \quad \delta A + \delta' B + D = 0, \quad \varepsilon A + \varepsilon' B + E = 0, \text{ etc.}$$

oder noch einfacher, da man gleich anfangs statt $\delta : \delta'$, $\varepsilon : \varepsilon'$ etc. hätte $\delta : 1$, $\varepsilon : 1$, etc. setzen können:

$$A + B + C = 0, \quad \delta A + B + D = 0, \quad \varepsilon A + B + E = 0, \text{ etc.}$$

Eigentlich genommen, werden also in diesen nunmehrigen Gleichungen durch die Buchstaben A, B, C,... nicht wie bisher bloss die Punkte A, B, C,... (oder vielmehr die Abschnitte AA', BB', CC',... §. 18.), sondern diese Punkte, jeder noch mit einem gewissen, durch den ganzen Verlauf der Rechnung constanten Coëfficienten a, b, c,... behaftet, ausgedrückt. Man kann daher mit solchen Gleichungen offenbar die nämlichen algebraischen Operationen, wie mit den bisherigen anstellen, kann, durch successive Elimination der Punkte A und B, eine

Gleichung zwischen je drei andern Punkten des Systems ableiten, z. B.

$$(1-\delta)A+C-D=0,\ (1-\varepsilon)A+C-E=0,$$
$$(\delta-\varepsilon)C-(1-\varepsilon)D+(1-\delta)E=0,\ \text{etc.}$$

darf aber aus diesen Gleichungen nur solche Verhältnisse folgern, welche Functionen der beibehaltenen Coëfficienten $\delta, \varepsilon, \ldots$ allein sind, also nur D.- und Vl.verhältnisse, als bei welchen die Coëfficienten $a, b, c, \ldots$ hätte man sie anfänglich auch stehen lassen, zuletzt von selbst herausgefallen seyn würden.

Werde z. B. der Werth des D.verhältnisses (C,D,A,E) verlangt. Die hierzu nöthigen Gleichungen zwischen C, D, A und C, D, E sind:

$$C-D+(1-\delta)A=0,\ (\delta-\varepsilon)C-(1-\varepsilon)D+(1-\delta)E=0.$$

Aus der erstern folgt: $CA:AD=-1:1$,

[oder vielmehr $=-d:c$];

aus der letztern: $CE:ED=-(1-\varepsilon):(\delta-\varepsilon)$,

[oder vielmehr $=-d(1-\varepsilon):c(\delta-\varepsilon)$];

und durch Verbindung dieser Proportionen:

$$(C, D, A, E) = \frac{\delta-\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Soll ferner der Werth des Dreieckschn.verhältnisses $\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}$ bestimmt werden, so übersieht man leicht, dass erstlich die Coëfficienten b, d, f der Punkte B, D, F gar nicht ins Spiel kommen, dass zweitens durch Multiplication von $AB:BC$ mit $CD:DE$ der Coëfficient c weggeschafft wird, und wenn man hierein noch $EF:FA$ multiplicirt, nicht nur e, sondern auch a herausfällt.

Auf diese Weise lässt sich also jedes D.- und Vl.-verhältniss zwischen den Punkten des Systems als Function

der Coëfficienten $\delta, \varepsilon, \ldots$ darstellen, so wie diese letzteren selbst nichts anders, als die Werthe der D.verhältnisse (A, B, C, D), (A, B, C, E), etc. ausdrücken (§. 226.).

§. 237. Um bei Bestimmung dieser zusammengesetzten Verhältnisse nicht nöthig zu haben, die Werthe der einzelnen einfachen Verhältnisse mit niederzuschreiben, kann man sich folgender aus dem Vorigen leicht fliessender Regel bedienen. — Für jedes einfache Verhältniss, wie $AB : BC$, suche man die auf Null reducirte Gleichung zwischen den drei Punkten desselben, A, B, C, stelle auch diese Punkte in derselben Folge, in welcher sie im Verhältnisse selbst vorkommen, also hier zuerst A, dann B und zuletzt C. Alsdann ist das Product aus den Coëfficienten der letzten Punkte aller Gleichungen, dividirt durch das Product aus den Coëfficienten aller ersten Punkte der gesuchte Werth des Vl.verhältnisses.

Die nämliche Regel lässt sich auch bei der Werthbestimmung eines D.verhältnisses, (I, K, L, M), anwenden, indem man dasselbe als ein Zweieckschn.verhältniss, $(IL : LK)\ (KM : MI)$, betrachtet. Man suche daher die Gleichungen zwischen I, L, K und zwischen K, M, I:

$$\iota I + \lambda L + \varkappa K = 0,$$
$$\varkappa' K + \mu M + \iota' I = 0;$$

oder, was dasselbe ist: man drücke jeden der beiden Schneidepunkte L, M durch die beiden Grenzpunkte I, K aus, und zwar L durch I und K, M durch K und I:

$$\iota I + \varkappa K \equiv L,$$
$$\varkappa' K + \iota' I \equiv M,$$

und man hat sogleich $(I, K, L, M) = \varkappa\iota' : \iota\varkappa'$.

§. 238. Sind nun bei n Punkten $A, B, C, D, \ldots N$ in einer geraden Linie, $n - 3$ zwischen denselben gebil-

dete und von einander unabhängige D.- und Vl.verhältnisse gegeben, und soll daraus eines der übrigen dieser Verhältnisse gefunden werden (§. 233.), so setze man:

$$A+B+C=0,\quad \delta A+B+D=0,\quad \ldots\quad \nu A+B+N=0,$$

und bestimme hieraus die Werthe der $n-3$ gegebenen Verhältnisse und des gesuchten als Functionen der $n-3$ Coëfficienten $\delta, \varepsilon, \ldots \nu$. Dies giebt ein System von $n-2$ Gleichungen, aus denen man, nach Elimination der $n-3$ Hülfsgrössen $\delta, \varepsilon, \ldots \nu$, eine Gleichung zwischen den $n-3$ gegebenen Verhältnissen und dem gesuchten bekommt, und somit das letztere in Werthen der erstern ausdrücken kann.

Beispiel. Bei einem Systeme von sechs Punkten $A, \ldots F$ in einer Geraden sind die $6-3=3$ Dreieckschn.-verhältnisse

$$(BC:CA)\,(AE:EF)\,(FD:DB)=p$$
$$(DE:EC)\,(CA:AB)\,(BF:FD)=q$$
$$(FA:AE)\,(EC:CD)\,(DB:BF)=r$$

gegeben. Das Dreieckschnittsverhältniss

$$(AD:DC)\,(CF:FE)\,(EB:BA)=x$$

zu finden. — Man setze:

$$A+B+C=0,\quad \delta A+B+D=0,$$
$$\varepsilon A+B+E=0,\quad \zeta A+B+F=0.$$

Um nun zuerst die Werthe von p, q, r, x durch $\delta, \varepsilon, \zeta$ auszudrücken, bilde man nach der im vorigen §. mitgetheilten Regel die Gruppen von Gleichungen

$$\overbrace{\begin{aligned} B+C+A&=0,\\ (\zeta-\varepsilon)A-E+F&=0,\\ \delta F-\zeta D+(\delta-\zeta)B&=0;\end{aligned}}^{\text{für } p}\qquad \overbrace{\begin{aligned} -(1-\varepsilon)D+(1-\delta)E+(\delta-\varepsilon)C&=0,\\ C+A+B&=0,\\ (\delta-\zeta)B+\delta F-\zeta D&=0;\end{aligned}}^{\text{für } q}$$

woraus sich $p = \frac{\delta - \zeta}{\delta(\zeta - \varepsilon)}$, $q = \frac{(\delta - \varepsilon)\zeta}{(1 - \varepsilon)(\delta - \zeta)}$ ergiebt.

Durch ein gleiches Verfahren erhält man:

$$r = \frac{\delta(1 - \varepsilon)}{\zeta(\delta - 1)}, \quad x = \frac{\varepsilon(\zeta - 1)}{(\delta - 1)(\zeta - \varepsilon)};$$

und es ist nur noch übrig, aus diesen vier Gleichungen, $\delta, \varepsilon, \zeta$ zu eliminiren. Zu dem Ende bemerke man, dass in jedem der Brüche, wodurch p, q, r ausgedrückt werden, die Summe des Zählers und Nenners immer dieselbe ist, nämlich

$$\delta - \zeta + \delta(\zeta - \varepsilon) = \nu;$$

dass folglich mit Anwendung dieser durch ν bezeichneten Summe

$$p = \frac{\nu}{\delta(\zeta - \varepsilon)} - 1, \quad q = \frac{\nu}{(1 - \varepsilon)(\delta - \zeta)} - 1,$$

$$r = \frac{\nu}{\zeta(\delta - 1)} - 1$$

geschrieben werden kann. *) Man setze daher zur Abkürzung

$$\frac{1}{1 + p} = p', \quad \frac{1}{1 + q} = q', \quad \frac{1}{1 + r} = r', \quad \text{so wird}$$

$$\nu p' = \delta(\zeta - \varepsilon), \quad \nu q' = (1 - \varepsilon)(\delta - \zeta), \quad \nu r' = \zeta(\delta - 1).$$

Hieraus findet sich weiter:

$$\nu(1 - q' - r') = \zeta(1 - \varepsilon), \quad \nu(1 - r' - p') = \delta(1 - \zeta),$$

$$\nu(1 - p' - q') = \varepsilon(\delta - \zeta);$$

*) Es folgt hieraus, dass für $\nu = 0$ sich jede der drei Grössen p, q, r und mithin auch ihr Product auf -1 reducirt. In der That findet sich dieses Product

$$pqr = (FA : AB)(BC : CD)(DE : EF)$$

$$= \frac{\delta - \varepsilon}{(\zeta - \varepsilon)(\delta - 1)} = \frac{\nu}{(\zeta - \varepsilon)(\delta - 1)} - 1.$$

mithin, wenn man das Product aus diesen drei Gleichungen durch das Product aus den drei vorhergehenden dividirt:

$$\frac{(1-q'-r')(1-r'-p')(1-p'-q')}{p'q'r'}=\frac{\varepsilon(1-\zeta)}{(\zeta-\varepsilon)(\delta-1)}=-x,$$

oder, wenn p', q', r' wiederum durch p, q, r ausgedrückt werden:

$$x=\frac{(1-qr)(1-rp)(1-pq)}{(1+p)(1+q)(1+r)}.$$

Setzt man z. B. $p=-2$, $q=-2$, $r=-\frac{5}{4}$, so wird hiernach $x=27$. Es finden diese Werthe statt für $AB=BC=CD=DE=EF$.

§. 239. Betrachten wir jetzt ein System von Punkten $A, B, \ldots$, welche in einer Ebene enthalten sind. Auf A, B, C als F.punkte bezogen, seyen die Gleichungen für die übrigen Punkte:

$$aA+bB+cC+dD=0,$$
$$\varepsilon aA+\varepsilon' bB+\varepsilon'' cC+eE=0,$$
$$\zeta aA+\zeta' bB+\zeta'' cC+fF=0,$$
u. s. w.

also $a+b+c+d=0$, $\varepsilon a+\varepsilon' b+\varepsilon'' c+e=0$, etc. Da wir nun gegenwärtig bloss diejenigen Eigenschaften des Systems berücksichtigen wollen, die dasselbe mit einem ihm collinear verwandten, als solchen, gemein hat, und da hierbei nur die Verhältnisse $\varepsilon:\varepsilon':\varepsilon''$, $\zeta:\zeta':\zeta''$, etc. unverändert bleiben (§. 219.), so lassen wir abermals die Coëfficienten $a, b, c, d, e, f, \ldots$ weg, setzen auch, weil es nicht auf die absoluten Werthe von $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$, sondern bloss auf ihr gegenseitiges Verhältniss ankommt, $\varepsilon''=1$, und eben so $\zeta''=1$, etc. und schreiben hiernach jene Gleichungen unter folgender einfachst möglicher Form:

$$A + B + C + D = 0,$$
$$\varepsilon A + \varepsilon' B + C + E = 0,$$
$$\zeta A + \zeta' B + C + F = 0,$$

u. s. w.

Zur richtigen Anwendung dieser Gleichungen haben wir uns, eben so wie in §. 236., nur vorzustellen, dass $A, B, C, D, E, \ldots$ nicht mehr bloss Punkte, sondern Punkte, jeder mit einem gewissen während der ganzen Rechnung unveränderlichen Coëfficienten verbunden, bedeuten. Hieraus folgt wiederum, dass die Rechnung mit diesen Gleichungen ganz dieselbe, wie mit den anfänglichen, nicht abgekürzten, ist, und dass man durch successive Elimination der F.punkte A, B, C eine Gleichung zwischen je vier andern Punkten des Systems entwickeln kann.

§. 240. A, B, C in der jetzt angegebenen Bedeutung genommen, drückt $\varepsilon A + \varepsilon' B$ einen Punkt der Geraden AB aus, (dessen Lage gegen A und B aber erst durch Zusammensetzung des Verhältnisses $\varepsilon : \varepsilon'$ mit dem der weggelassenen Coëfficienten, $a : b$, vollkommen bestimmt wird.) Eben so ist $C + E$ ein gewisser in CE liegender Punkt, (nicht eben der Mittelpunkt (§. 30.), sondern der Punkt $cC + eE$.) Da nun $\varepsilon A + \varepsilon' B + C + E = 0$, so folgt $\varepsilon A + \varepsilon' B = -(C + E) \equiv$ dem Durchschnitte der Geraden AB und CE. Heisse dieser P, so kann man setzen:

$$\varepsilon A + \varepsilon' B = -C - E = P,$$

ohne dem P einen andern Coëfficienten, als die Einheit zu geben, indem man den Coëfficienten, welchen P hiernach eigentlich erhalten sollte, $[\varepsilon a + \varepsilon' b = -(c + e)]$, eben so mit dem Buchstaben P, wie a mit A, b mit B, etc. vereinigt denkt.

Allgemein also: besteht zwischen den vier Punkten des Systems I, K, L, M die Gleichung $\iota I + \varkappa K + \lambda L + \mu M = 0$, so folgt daraus für den Durchschnitt P der Linien IK und LM:

$$P = \pm(\iota I + \varkappa K) = \mp(\lambda L + \mu M).$$

Ob man $P = +$ oder $-(\iota I + \varkappa K)$ setzt, ist gleichgültig. Nur muss man bei dem einmal Gesetzten im Fortgange der Rechnung bleiben, und darf, wenn man $P = +(\iota I + \varkappa K)$ genommen, den andern Werth nicht $+$, sondern $-(\lambda L + \mu M)$ nehmen, und umgekehrt. Eben so leuchtet ein, dass die positive Annahme sämmtlicher Glieder in den Gleichungen des vorigen §., so wie in den analogen Gleichungen des §. 236., nicht wesentlich nothwendig ist. Man kann eben so gut $A - B + C = D$, $\varepsilon A + \varepsilon' B - C = E$, etc. setzen, muss aber nur mit den einmal gewählten Zeichen die Rechnung gleichförmig fortführen.

So wie übrigens, zwischen je drei Punkten, z. B. I, K, P, welche der Construction nach in einer Geraden liegen, immer eine Gleichung statt findet, so folgt auch umgekehrt, dass, wenn zwischen drei Punkten einer Ebene eine Gleichung sich durch den Calcul ergiebt, diese drei Punkte in einer Geraden liegen.

§. 241. Die Berechnung der D.- und Vl.verhältnisse geschieht auf dieselbe Art, wie in dem Vorigen bei einem Systeme von Punkten in einer Geraden. Zuerst sucht man nach Anleitung des vor. §. für jedes einfache Verhältniss besonders, die Gleichung zwischen den drei in einer Geraden enthaltenen Punkten desselben, und verfährt dann nach der in §. 237. angegebenen Regel.

Soll z. B. der Werth eines D.verhältnisses von der Form ... (I, K, LM, NO) gefunden werden, so suche man

zuerst die Gleichungen zwischen I, K, L, M und I, K, N, O. Seyen diese:

$$1)\quad \iota I + \varkappa K + \lambda L + \mu M = 0,$$

$$2)\quad \iota' I + \varkappa' K + \nu N + o O = 0.$$

Sey ferner $IK \cdot LM \equiv P$, $IK \cdot NO \equiv Q$, so ist

$$\iota I + \varkappa K = P,$$

$$\varkappa' K + \iota' I = Q, \text{ folglich}$$

$$(I, K, LM, NO) = (I, K, P, Q) = \iota'\varkappa : \iota\varkappa'.$$

Zugleich sieht man hieraus, dass man, auch ohne erst die Bezeichnungen P und Q zu gebrauchen, zu dem Werthe des D.verhältnisses (I, K, LM, NO) aus den Gleichungen 1) und 2) unmittelbar gelangen kann, wenn man darin $\lambda L + \mu M$ und $\nu N + o O$ sogleich als die Punkte nimmt, welche in dem Ausdrucke des D.verhältnisses durch LM und NO angezeigt werden. — Eben so lässt sich auch die Berechnung eines Vl.verhältnisses abkürzen, wenn die Schneidepunkte der Seiten nicht geradezu, sondern statt jedes derselben zwei Punkte gegeben sind, die mit dem Schneidepunkte in einer Geraden liegen, wie in §. 221. 3.

Hat man nun auf diese Weise die Werthe aller bei der Aufgabe in Betracht kommenden D.- und Vl.verhältnisse durch die $2(n-4)$ Hülfsgrössen ε und ε', ζ und ζ', etc. ausgedrückt, so kann man durch Elimination dieser letztern die zu bestimmende Relation zwischen den $2n-8$ gegebenen Verhältnissen und einem $(2n-7)$ten gesuchten, so wie die andern hierhergehörigen Eigenschaften der Figur, entwickeln.

§. 242. **Zusätze.** *a.* Wie schon aus §. 221. 4. folgt, und auch aus dem vor. §. sich ganz leicht finden lässt, sind die Hülfsgrössen ε und ε', ζ und ζ', etc. Werthe von D.verhältnissen in den Linien AC und BC, nämlich:

$\varepsilon = (A, C, BD, BE)$, $\varepsilon' = (B, C, AD, AE)$, u. s. w.,

so dass hiernach, schon durch die anfänglichen Gleichungen selbst, jeder der $n-4$ Punkte $E, F, ..$ in Bezug auf die vier ersten $A, .. D$ durch zwei D.verhältnisse bestimmt ist.

b. Wenn einer von den n Punkten der Figur, G, mit zwei andern derselben, E und F, in einer Geraden liegt, so ist damit von den zwei zur Bestimmung von G nöthigen D.verhältnissen das eine schon als gegeben anzusehen. Denn sind H, I irgend zwei andere ausserhalb der Geraden EFG liegende Punkte der Figur, so sind die Punkte $EF \cdot GH$ und $EF \cdot GI$ mit G identisch, und mithin (§. 182.): $(E, F, GH, GI) = 1$; so wie umgekehrt aus dieser Gleichung folgt, dass E, F, G in einer Geraden liegen. Das andere, oder vielmehr das einzige in diesem Falle zur vollkommenen Bestimmung von G erforderliche D.verhältniss, so wie die Bedingung selbst, dass E, F, G in einer Geraden sind, wird am einfachsten dargestellt, wenn man G auf E und F unmittelbar bezieht und daher

$$\eta E + F + G = 0$$

setzt. Denn aus den Gleichungen für E und F folgt: $(\varepsilon - \zeta)A + (\varepsilon' - \zeta')B + E - F = 0$, und hieraus in Verbindung mit $G + F + \eta E = 0$, das D.verhältniss:

$$(E, F, AB, G) = -\eta.$$

So vielmal also bei einem Systeme von n Punkten in einer Ebene der Fall eintritt, dass drei Punkte desselben in einer Geraden liegen, um eben so viel Einheiten wird die Anzahl der Hülfsgrössen $\varepsilon, \varepsilon', ...$ kleiner als $2n-8$ seyn können, um eben so viel aber die Anzahl der gegebenen D.verhältnisse kleiner als $2n-8$ seyn

müssen, wenn zwischen letztern gegenseitige Unabhängigkeit noch statt finden soll.

§. 243. Folgende Beispiele werden das Bisherige noch deutlicher machen.

1) Die einfachste ebene Figur, worauf der abgekürzte barycentrische Calcul angewendet werden kann, ist das aus vier Punkten entstehende ebene Netz, indem man hier noch keiner Hülfsgrössen bedarf. Alle bei dem Netze vorkommenden D.- und Vl.verhältnisse, so wie die merkwürdigen Fälle, wo drei oder mehrere Punkte in einer Geraden liegen, etc. können mittelst dieses Calculs, leichter als auf jede andere Weise, gefunden werden. Um dieses nur an den in §. 198. entwickelten Eigenschaften zu zeigen, so setze man (Fig. 43.):

$$A+B+C+D=0.$$

Hieraus folgt $-B-C=A+D=A'$ (§. 240.)

$$-C-A=B+D=B'$$

$$-A-B=C+D=C'$$

u. hieraus weiter: $B-C=B'-C'=F$

$$C-A=C'-A'=G$$

$$A-B=A'-B'=H;$$

mithin: $F+G+H=0,$

d. h. F, G, H liegen in einer Geraden. Aus den Werthen für A', B', C' ergiebt sich ferner:

$$B'+C'=B+C+2D=D-A=A'',$$

und eben so $C'+A'=D-B=B''$, $A'+B'=D-C=C''$;

folglich $B-C=B'-C'=C''-B''=F$, etc.

d. h. die Gerade $B''C''$ geht durch den Durchschnitt F der Geraden BC und $B'C'$, u. s. w.

Sodann fliesst aus $A'=A+D$ und $A''=D-A$, das D.verhältniss $(A, D, A', A'')=-1$; und aus den

durch A, B, C ausgedrückten Werthen von A', B', C' das Dreieckschn.verhältniss:

$$(BA' : A'C)\ (CB' : B'A)\ (AC' : C'B) = 1.$$

2) Die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ in Fig. 43. haben eine solche Lage gegen einander, dass erstlich die Spitzen von $A'B'C'$ in den Seiten von ABC liegen, und dass zweitens die Geraden, welche die gegenüberliegenden Spitzen beider Dreiecke verbinden, sich in einem Punkte D schneiden. Wir wollen nunmehr von diesen zwei Bedingungen das einemal nur die eine und das anderemal nur die andere gelten lassen, und somit die vorigen Sätze auf zweifache Weise zu verallgemeinern suchen.

Seyen demnach ABC und $A'B'C'$ Fig. 52. zwei Dreiecke in einer Ebene, von welchen die Spitzen A, B, C des einen den Spitzen A', B', C' des andern bloss dergestalt entsprechen, dass die Geraden, welche die sich entsprechenden Spitzen verbinden, in einem und demselben Punkte D zusammentreffen. Die dieser Figur zum Grunde zu legenden Gleichungen werden daher seyn:

$$A + B + C + D = 0, \text{ und nach §. 242. } b.$$

$$A' = \alpha A + D,\quad B' = \beta B + D,\quad C' = \gamma C + D.$$

Heissen nun wiederum die Durchschnitte je zweier sich entsprechenden Seiten:

$$BC \cdot B'C' \equiv F,\quad CA \cdot C'A' \equiv G,\quad AB \cdot A'B' \equiv H,$$

so ist:
$$B' - C' = \beta B - \gamma C = F,$$
$$C' - A' = \gamma C - \alpha A = G,$$
$$A' - B' = \alpha A - \beta B = H,$$

mithin $F + G + H = 0$, so dass folglich auch hier die Durchschnitte F, G, H der drei Paare sich entsprechender Seiten in einer Geraden liegen. *)

*) Man wird bald finden, dass dieser Satz, ähnlicherweise wie der

Seyen die Durchschnittspunkte je zweier sich nicht entsprechenden Seiten:

$$BC\cdot C'A' \equiv M,\quad CA\cdot A'B' \equiv N,\quad AB\cdot B'C' \equiv O,$$
$$BC\cdot A'B' \equiv P,\quad CA\cdot B'C' \equiv Q,\quad AB\cdot C'A' \equiv R.$$

Um die Ausdrücke dieser Punkte zu erhalten, hat man:

$$A' = \alpha A + D = (\alpha - 1)A - B - C$$
$$B' = \beta B + D = -A + (\beta - 1)B - C$$
$$C' = \gamma C + D = -A - B + (\gamma - 1)C$$

folglich $(\alpha - 1)C' + A' = -\alpha B + [(\gamma-1)(\alpha-1)-1]C = M$, und eben so $(\beta - 1)A' + B' = N$, $(\gamma - 1)B' + C' = O$, $A' + (\alpha - 1)B' = P$, $B' + (\beta - 1)C' = Q$, $C' + (\gamma - 1)A' = R$.

Hieraus ergeben sich die Dreieckschn.verhältnisse:

$$\frac{C'M}{MA'}\cdot\frac{A'N}{NB'}\cdot\frac{B'O}{OC'} = \frac{1}{(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)}$$
$$\frac{A'P}{PB'}\cdot\frac{B'Q}{QC'}\cdot\frac{C'R}{RA'} = (\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$$

folglich $\dfrac{B'O.B'Q}{OC'.QC'}\cdot\dfrac{C'M.C'R}{MA'.RA'}\cdot\dfrac{A'N.A'P}{NB'.PB'} = 1;$

und auf gleiche Weise:

$$\frac{BM.BP}{MC.PC}\cdot\frac{CN.CQ}{NA.QA}\cdot\frac{AO.AR}{OB.RB} = 1;\ \text{also:}$$

Wenn zwei Dreiecke in einer Ebene eine solche Lage gegen einander haben, dass die drei Geraden, welche die gleichnamigen Spitzen verbinden, sich in einem Punkte schneiden, so ist das Product aus den Verhältnissen, nach welchen jede Seite des einen

speciellere (§. 207.), sich auch ohne Rechnung mit Hülfe einer Construction im körperlichen Raume darthun lässt, und dass er selbst dann gilt, wenn die beiden Dreiecke nicht mehr in einer und derselben Ebene liegen.

Dreiecks von den zwei ungleichnamigen Seiten des andern geschnitten wird, der Einheit gleich.

Lässt man den Punkt A' in AD fortrücken, bis er in die Seite BC fällt, und eben so B' in BD bis CA, C' in CD bis AB, so fallen M, P mit A'; N, Q mit B'; O, R mit C' zusammen, und die linke Seite der letztern Gleichung geht über in das Quadrat des für den speciellen Fall 1) der Einheit gleich gefundenen Dr.verhältnisses.

3) Wir nehmen jetzt zweitens an, dass die Spitzen des Dreiecks $A'B'C'$ (Fig. 53.) in den Seiten des Dreiecks ABC liegen, dass aber die Geraden durch die gegenüberstehenden Spitzen sich nicht in Einem, sondern in den drei Punkten

$$BB' \cdot CC' \equiv D,\ CC' \cdot AA' \equiv E,\ AA' \cdot BB' \equiv F$$

schneiden. Sey ferner:

$$AA' \cdot B'C' \equiv I,\ BB' \cdot C'A' \equiv K,\ CC' \cdot A'B' \equiv L.$$

Es erhellet nun sogleich, dass zur Construction dieser Figur nur die fünf Punkte A, B, C, D und der in BC liegende A' gegeben zu seyn brauchen, indem sich daraus alle übrigen bloss durch Ziehen gerader Linien finden lassen. Man setze daher:

$$1)\quad A+B+C+D=0,$$
$$2)\quad B+cC=A',$$

so werden sich alle bei dieser Figur vorkommenden D.- und Vl.verhältnisse als Functionen von c ergeben, und es wird daher schon zwischen je zwei solchen Verhältnissen immer eine Relation statt finden. Es folgen nämlich aus 1) und 2) die Ausdrücke der übrigen Punkte:

$$3)\quad A+C=-B-D=B',$$
$$4)\quad A+B=-C-D=C',$$

aus 2) u. 4): $$5)\quad A+A'=cC+C'=E,$$

aus 2) u. 3): 6) $cA + A' = B + cB' = F$,
aus 2), 3) u. 4): 7) $(1+c)A + A' = cB' + C' = I$, etc.
und aus diesen Gleichungen die Werthe folgender D.verhältnisse durch c ausgedrückt:

aus 5) u. 6): $(A, A', E, F) = c$,
aus 5) u. 7): $(A, A', E, I) = 1 + c$,
aus 6) u. 7): $(A, A', F, I) = \frac{1+c}{c}$,

Wir haben demnach folgende Relationen zwischen D.verhältnissen:

$$(A', I, A, E) = (A', I, F, A) = -(A, A', E, F)$$
$$= (B', K, B, F) = (B', K, D, B) = \text{etc.} = -c.$$

Die Gleichheit der beiden ersten D.verhältnisse lässt sich auch so ausdrücken, dass das Verhältniss $A'A : AI$ die mittlere Proportionalgrösse ist zwischen den Verhältnissen $A'E : EI$ und $A'F : FI$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass

$$A'A^2 : IA^2 = A'E . A'F : IE . IF.$$

Noch bieten sich in der Figur mehrere Dreieckschnittsverhältnisse zur Untersuchung dar. — Aus den Gleichungen 2), 3), 4) fliesst:

(c) $(BA' : A'C)(CB' : B'A)(AC' : C'B) = c.$

Sey ferner $BC \cdot B'C' \equiv M$, $CA \cdot C'A' \equiv N$, $AB \cdot A'B' \equiv O$, so hat man aus 3) u. 4): $B - C = -B' + C' = M$,
aus 5): $cC - A = -C' + A' = N$,
aus 6): $cA - B = -A' + cB' = O$.

Hieraus ergeben sich die Dr.verhältnisse:

(d) $(BM : MC)(CN : NA)(AO : OB) = -\frac{1}{c^2}$;

(e) $(B'M : MC')(C'N : NA')(A'O : OB') = -c$;

und wir erhalten damit folgendes Theorem:

Wird, in ein Dreieck (ABC) ein anderes (A′B′C′) beschrieben, so ist erstlich das Dreieckschnittsverhältniss (d), nach welchem die Seiten des umschriebenen Dreiecks von den gegenüberliegenden Seiten des einbeschriebenen geschnitten werden, gleich dem negativen Quadrate des Umgekehrten des Dr.verhältnisses (e), nach welchem die Seiten des einbeschriebenen Dreiecks von den Seiten des umschriebenen geschnitten werden; und zweitens das letztere Dr.verhältniss (e) gleich dem negativen Werthe des Dr.verhältnisses (c), nach welchem die Seiten des umschriebenen Dreiecks von den Spitzen des einbeschriebenen getheilt werden.

Von den drei Dreiecken ABC, $A'B'C'$, DEF haben die zwei ersten ihre Spitzen in den Seiten des dritten liegen und sind daher als in das dritte einbeschrieben zu betrachten. Nehmen wir nun zuerst DEF als umschriebenes und ABC als einbeschriebenes Dreieck, so ist nach dem ersten Theile des vorigen Satzes, und weil $EF \cdot BC \equiv A'$, $FD \cdot CA \equiv B'$, $DE \cdot AB \equiv C'$:

$$(EA' : A'F)(FB' : B'D)(DC' : C'E)$$
$$= -1 : [(BA' : A'C)(CB' : B'A)(AC' : C'B)]^2.$$

Nehmen wir zweitens $A'B'C'$ als das in DEF einbeschriebene Dreieck, so ist nach dem zweiten Theile des Satzes, und weil $EF \cdot B'C' \equiv I$, etc.:

$$(B'I : IC')(C'K : KA')(A'L : LB')$$
$$= -(EA' : A'F)(FB' : B'D)(DC' : C'E).$$

Durch Verbindung dieser zwei Gleichungen erhalten wir aber zu dem obigen Satze noch folgenden dritten Theil:

Das Dr.verhältniss, nach welchem die Seiten des einbeschriebenen Dreiecks (A′B′C′) von den Geraden, welche die Spitzen desselben mit den gegenüberliegen-

den Spitzen des umschriebenen (ABC) *verbinden, geschnitten werden, ist gleich dem Quadrate des Umgekehrten des Dr.verhältnisses, nach welchem die Seiten des umschriebenen Dreiecks von den Spitzen des einbeschriebenen geschnitten werden.*

4) Als letztes Beispiel diene ein Viereck $ABCD$ (Fig. 54.), in welches ein anderes Viereck $EFGH$ einbeschrieben ist, so dass E in AB, F in BC, etc. liegt. Man setze diesen einfachen Bedingungen zufolge:

$$\text{I.}\quad \begin{cases} A+B+C+D=0, \\ eA+B+E=0, \\ fB+C+F=0, \\ gC+D+G=0, \\ hD+A+H=0. \end{cases}$$

Alle bei dieser Figur statt habenden D.- und Vl.verhältnisse werden sich daher durch e, f, g, h ausdrücken lassen, und man wird folglich aus je vier solchen Verhältnissen den Werth jedes fünften bestimmen können. Sey demnach die Aufgabe vorgelegt:

Aus den vier D.verhältnissen

$$(E, G, BD, AC)=a, \ (F, H, AC, BD)=b,$$
$$(A, C, EG, FH)=c, \ (B, D, FH, EG)=d,$$

nach welchen die Diagonalen des einbeschriebenen Vierecks von den Diagonalen des umschriebenen, und umgekehrt die letztern von den erstern geschnitten werden, das Viereckschn.verhältniss

$$(AE:EB)\ (BF:FC)\ (CG:GD)\ (DH:HA)=x$$

zu finden, nach welchem die Seiten des umschriebenen Vierecks von den Spitzen des einbeschriebenen getheilt werden. —

Aus den Gleichungen I. folgern wir:

$$gE + eG + e(1-g)D + g(1-e)B = 0,$$
$$G + E - (1-e)A - (1-g)C = 0,$$
$$hF + fH + h(1-f)C + f(1-h)A = 0,$$
$$H + F - (1-f)B - (1-h)D = 0,$$

und hieraus die gegebenen D.verhältnisse in Werthen von $e, .. h$:

$$(E, G, BD, AC) = a = \frac{e}{g}, \quad (F, H, AC, BD) = b = \frac{f}{h},$$

$$(A, C, EG, FH) = c = \frac{f(1-g)(1-h)}{h(1-e)(1-f)},$$

$$(B, D, FH, EG) = d = \frac{g(1-e)(1-h)}{e(1-f)(1-g)}.$$

Der Werth von x ergiebt sich unmittelbar aus den Gleichungen I.:

$$x = 1 : efgh.$$

Mittelst der vier Gleichungen für $a, .. d$ sind nun umgekehrt die Werthe von $e, .. h$, durch $a, .. d$ ausgedrückt, zu suchen und hierauf in der Gleichung für x zu substituiren; welches nachstehende Rechnung giebt. Zuerst hat man:

$$\frac{abd}{c} = \left(\frac{1-e}{1-g}\right)^2 = a^2\left(\frac{1-e}{a-e}\right)^2,$$

$$\frac{acd}{b} = \left(\frac{1-h}{1-f}\right)^2 = \frac{1}{b^2}\left(\frac{b-f}{1-f}\right)^2;$$

mithin, wenn man zur Abkürzung a, b, c, d resp. $= \alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \delta^2$ setzt:

$$\frac{\beta\delta}{\alpha\gamma} = \frac{1-e}{\alpha^2-e}, \quad \alpha\beta\gamma\delta = \frac{\beta^2-f}{1-f}.$$

Hieraus fliesst nun sogleich:

$$e = \frac{\alpha(\alpha\beta\delta-\gamma)}{\beta\delta-\alpha\gamma}, \quad f = \frac{\beta(\alpha\gamma\delta-\beta)}{\alpha\beta\gamma\delta-1},$$

$$g = \frac{e}{\alpha^2} = \frac{\alpha\beta\delta - \gamma}{\alpha(\beta\delta - \alpha\gamma)}, \quad h = \frac{f}{\beta^2} = \frac{\alpha\gamma\delta - \beta}{\beta(\alpha\beta\gamma\delta - 1)};$$

und man bekommt, wenn man noch die Quadratwurzel von x mit ξ bezeichnet, folgendes Resultat:

$$\xi = \frac{(\beta\delta - \alpha\gamma)(\alpha\beta\gamma\delta - 1)}{(\alpha\beta\delta - \gamma)(\alpha\gamma\delta - \beta)}.$$

— Die jetzt betrachtete Figur besteht eben so aus zwei in einander beschriebenen Vierecken, wie die vorherige (Fig. 53.) aus zwei Dreiecken zusammengesetzt war. Es lässt sich daher erwarten, dass mit den sehr einfachen und merkwürdigen Relationen, welche wir bei den zwei in einander beschriebenen Dreiecken entdeckten, einige analoge Relationen auch bei der Figur der zwei Vierecke vorkommen werden. Um dieses näher zu untersuchen, folgere man aus den Gleichungen I.:

$$efA - C + fE - F = 0, \quad fgB - D + gF - G = 0,$$
$$ghC - A + hG - H = 0, \quad heD - B + eH - E = 0.$$

Hiernach ist, wenn $EF \cdot AC \equiv I$, $FG \cdot BD \equiv K$, $GH \cdot AC \equiv L$, $HE \cdot BD \equiv M$ gesetzt wird:

[a] $(A, C, I, L) = (B, D, K, M) = 1 : efgh$ und

[b] $(EI : IF)(FK : KG)(GL : LH)(HM : ME) = 1 : efgh.$

Setzt man ferner $EF \cdot BD \equiv P$, $FG \cdot CA \equiv Q$, $GH \cdot DB \equiv R$, $HE \cdot AC \equiv S$, so ist wegen $(1 - e + ef)B - eD + E + eF = 0$:

$$P = E + eF \text{ und eben so}$$

$$Q = F + fG, \; R = G + gH, \; S = H + hE, \text{ folglich}$$

[c] $(EP : PF)(FQ : QG)(GR : RH)(HS : SE) = efgh.$

Endlich ist $(e - 1)gA + (1 - g)D + gE + G = 0,$
$(g - 1)eC + (1 - e)B + eG + E = 0,$ und
daher

[d] $\begin{cases}(E, G, AD, BC) = 1 : eg, \text{ und eben so} \\ (F, H, AB, CD) = 1 : fh.\end{cases}$

Alles dieses zusammengenommen bildet nun folgenden Satz:

Wird in ein ebenes Viereck ABCD ein anderes einbeschrieben, dessen Spitzen E, F, G, H resp. in die Seiten AB, BC, CD, DA des erstern fallen, so haben gleiche Werthe mit einander:

1) *das Viereckschnittsverhältniss [x], nach welchem die Seiten des ersten oder umschriebenen Vierecks von den Spitzen des zweiten oder einbeschriebenen getheilt werden;*

2) *das Vr.verhältniss [b], nach welchem die Seiten EF,... des zweiten Vierecks von den Diagonalen AC, BD des ersten abwechselnd geschnitten werden;*

3) *das Umgekehrte des Vr.verhältnisses [c], nach welchem die Seiten EF,... des zweiten Vierecks von den Diagonalen BD, AC des ersten abwechselnd geschnitten werden;*

4) *jedes der zwei D.verhältnisse [a], nach welchen die Diagonalen AC, BD des ersten Vierecks, AC von den Seiten EF und GH, BD von den Seiten FG und HE des zweiten Vierecks getheilt werden;*

5) *das Product aus den zwei D.verhältnissen [d], nach welchen die Diagonalen EG, FH des zweiten Vierecks, EG von den Seiten DA und BC, FH von den Seiten AB und CD des ersten getheilt werden.*

§. 244. Es ist noch übrig, die Anwendung des abgekürzten Calculs auf Systeme von Punkten im Raume zu zeigen. Folgendes sind die hierzu dienenden Sätze, welche nach dem, was in den vorhergehenden §§. über Systeme in Geraden und Ebenen gesagt worden, von selbst verständlich seyn werden.

a. Heissen die Punkte des Systems im Raume: $A, B, C, D, E, F, G, \ldots$, so setze man, A, B, C, D zu F.punkten genommen:

$$A + B + C + D + E = 0,$$
$$\zeta A + \zeta' B + \zeta'' C + D + F = 0,$$
$$\eta A + \eta' B + \eta'' C + D + G = 0,$$

u. s. w.

Aus diesen Gleichungen kann man durch successive Elimination von A, B, C, D eine Gleichung zwischen je fünf andern Punkten des Systems ableiten.

b. Soll der Punkt R gefunden werden, in welchem eine Gerade durch die zwei Punkte I, K von einer Ebene durch die drei Punkte L, M, N des Systems geschnitten wird, so entwickle man die Gleichung zwischen den fünf Punkten I, K, L, M, N:

$$\iota I + \varkappa K + \lambda L + \mu M + \nu N = 0,$$

und man hat $R = \pm(\iota I + \varkappa K) = \mp(\lambda L + \mu M + \nu N)$.

c. Jede Gleichung zwischen drei Punkten allein, wie $R = \iota I + \varkappa K$, giebt zu erkennen, dass die drei Punkte R, I, K in einer Geraden liegen; und jede Gleichung bloss zwischen vier Punkten, wie $R + \lambda L + \mu M + \nu N = 0$, dass die vier Punkte R, L, M, N in einer Ebene enthalten sind.

d. Die Berechnung der D.- und recurrirenden Verhältnisse richtet sich hier nach denselben Regeln, wie bei Systemen in Geraden und Ebenen, nachdem man für jedes einfache Verhältniss die Gleichung zwischen den drei Punkten desselben hingestellt hat. Um den Werth eines D.verhältnisses von der Form: (I, K, LMN, POQ) zu berechnen, entwickelt man die Gleichungen zwischen I, K, L, M, N und I, K, O, P, Q:

$$\iota I + \varkappa K + \lambda L + \mu M + \nu N = o,$$
$$\iota' I + \varkappa' K + o O + \pi P + \varrho Q = o,$$

und schliesst hieraus unmittelbar $(I, K, LMN, OPQ) = \iota'\varkappa : \iota\varkappa'$.

e. Die Anzahl der Coëfficienten $\zeta, \zeta', \ldots$ bei den Gleichungen in *a.* beträgt $3(n-5)$, nämlich drei für jeden der $n-5$ Punkte $F, G, H, \ldots$ Sind daher bei einem Systeme von n Punkten im Raume $3n-15$ von einander unabhängige D.- oder Vl.verhältnisse gegeben, und drückt man dieselben, so wie ein $(3n-14)$tes gesuchtes, durch die $3n-15$ Coëfficienten aus, so wird die Elimination dieser letztern aus den damit entstehenden $3n-14$ Gleichungen das verlangte Resultat herbeiführen.

f. Aus den Gleichungen

$$A + B + C + D + E = o,$$
$$\zeta A + \zeta' B + \zeta'' C + D + F = o, \text{ etc.}$$

folgt: $\zeta = (A, D, BCE, BCF)$, $\zeta' = (B, D, ACE, ACF)$, $\zeta'' = (C, D, ABE, ABF)$, etc. Jeder der Coëfficienten ζ, ζ', ζ'', $\eta, \ldots$ ist daher zugleich der Werth eines D.verhältnisses. Vergl. §. 225. 4. —

Liegt F in der Ebene ABD, so ist $\zeta'' = o$; liegt F in der Geraden AD, so sind ζ' und $\zeta'' = o$. Mit der Bedingung, dass vier Punkte des Systems in einer Ebene, oder drei Punkte in einer Geraden liegen, sind daher ein oder zwei D.verhältnisse als gegeben anzusehen.

§. 245. Beispiel. In der dreiseitigen Pyramide $ABCD$ (Fig. 55.) werden die gegenüberstehenden Seiten AC, BD von der Geraden EF in den Punkten E, F, und die gegenüberstehenden Seiten BC, AD von der Geraden GH in den Punkten G und H geschnitten.

Um dieses System von Punkten in Gleichungen zu setzen, denke man sich durch A, G, H eine Ebene gelegt, welche die Gerade EF im Punkte M schneide. Alsdann

liegen in einer Ebene die Punkte B, D, F, E, M; in einer zweiten Ebene die Punkte A, C, E, F, M; in einer dritten die Punkte A, D, H, G, M; und der Durchschnitt der ersten dieser drei Ebenen, BDM, mit AC ist E; der zweiten ACM mit BD ist F; der dritten ADM mit BC ist G. Sey daher für A, B, C, D als F.punkte:

$$A+B+C+D+M=0,$$

so folgt 1) $A+C=-(B+D+M)=E,$

2) $B+D=-(A+C+M)=F,$

3) $B+C=-(A+D+M)=G.$

Sey endlich für H, als einen in AD liegenden und von den übrigen unabhängigen Punkt:

$$4)\quad aA+D=H.$$

Alle aus diesem Systeme von acht Punkten entspringenden D.- und Vl.verhältnisse werden daher Functionen der einzigen Grösse a seyn, und es wird folglich schon zwischen je zweien dieser Verhältnisse eine Relation bestehen. — Dasselbe ergiebt sich auch folgenderweise. Bei einem Systeme von 8 Punkten müssen $3.8-15=9$ D.verhältnisse gegeben seyn. Mit der Bedingung aber, dass die 4 Punkte E, F, G, H resp. in den Geraden AC, etc. liegen sollen, sind eben so viel Paare von D.verhältnissen schon als gegeben zu betrachten, also nur $9-2.4=1$ noch zu wissen übrig, um jedes andere bestimmen zu können.

Werde nun verlangt, *eine Gerade zu ziehen, welche die vier Geraden AB, CD, EF, GH insgesammt schneidet.*

Man bewege eine Gerade dergestalt, dass sie fortwährend die drei ersten gegebenen Geraden, AB, CD, EF, schneidet, und somit ein hyperbolisches Hyperboloid erzeugt (§. 111.). Wird nun von dieser Fläche die vierte

Gerade GH geschnitten, welches dann in zwei Punkten geschieht, so wird die bewegte Gerade in jeder der beiden Lagen, wo sie durch den einen oder andern dieser Durchschnittspunkte geht, die vier gegebenen Geraden zugleich treffen, und mithin die verlangte seyn. — Man erkennt hierdurch schon im Voraus, dass die Lösung der vorgelegten Aufgabe zu einer quadratischen Gleichung führen muss.

In der That, treffe die gesuchte Gerade die EF und GH in den Punkten:

$$R = rE + F = rA + B + rC + D$$
$$S = sG + H = aA + sB + sC + D.$$

Sie treffe ferner die Geraden AB und CD in den Punkten:

$$P = pR + S = (pr + a)A + (p + s)B + (pr + s)C + (p + 1)D,$$
$$Q = qR + S = (qr + a)A + (q + s)B + (qr + s)C + (q + 1)D.$$

Da nun P in AB und Q in CD liegen soll, so hat man die Gleichungen:

$$pr + s = 0,\ p + 1 = 0,\ qr + a = 0,\ q + s = 0,$$

welche aufgelöst: $p = -1,\ -q = r = s = \sqrt{a}$, geben.

Hierdurch wird 5) $R = \sqrt{a}E + F$,

6) $S = \sqrt{a}G + H$,

7) $P = -R + S = -(1 - \sqrt{a})(\sqrt{a}A + B)$,

8) $Q = -\sqrt{a}R + S = +(1 - \sqrt{a})(\sqrt{a}C + D)$.

Aus diesen Gleichungen 1)...8) lassen sich alle in der Figur vorkommenden Vl.verhältnisse in Werthen von a berechnen. Wir heben darunter folgende, als der Einheit selbst gleiche, aus:

$$(AP:PB)\ (BF:FD)\ (DQ:QC)\ (CE:EA) = 1$$
$$(AP:PB)\ (BG:GC)\ (CQ:QD)\ (DH:HA) = 1$$
$$(ER:RF)\ (FD:DB)\ (BP:PA)\ (AC:CE) = 1$$
$$(ER:RF)\ (FB:BD)\ (DQ:QC)\ (CA:AE) = 1$$

$$(GS:SH)\,(HD:DA)\,(AP:PB)\,(BC:CG)=1$$
$$(GS:SH)\,(HA:AD)\,(DQ:QC)\,(CB:BG)=1.$$

Schon mittelst der beiden ersten dieser Formeln lässt sich nun unsere Aufgabe vollkommen lösen. Denn es ergeben sich daraus die Verhältnisse:

$$AP:PB=\sqrt{[(AE:EC)\,(CG:GB)\,(AH:HD)\,(DF:FB)]},$$
$$CQ:QD=\sqrt{[(CG:GB)\,(BF:FD)\,(CE:EA)\,(AH:HD)]},$$

und hiermit die zwei in der gesuchten Geraden liegenden Punkte P und Q. Zugleich sieht man aus diesen Formeln, dass die Lösung nur dann, und dann immer, möglich ist, wenn die zwei Producte $(BF:FD)(CE:EA)$ und $(BG:GC)\,(DH:HA)$ einerlei Zeichen haben, dass ferner, je nachdem das gemeinschaftliche Zeichen derselben das positive oder negative ist, die Verhältnisse $AP:PB$ und $CQ:QD$ mit einerlei oder verschiedenen Zeichen zu behaften sind *), und dass es endlich, wie schon die Wurzelgrösse $\sqrt{a}$ andeutet, bei möglicher Lösung immer zwei Linien giebt, welche der Aufgabe Genüge leisten.

Die Punkte R und S, welche nach Ziehung der Geraden PQ sich als Durchschnitte derselben mit EF und GH ergeben, können auch ohne dieses durch die Verhältnisse $ER:RF$ und $GS:SH$ bestimmt werden, deren Werthe sich aus den voranstehenden Formeln ebenfalls leicht finden lassen.

Was noch die gegenseitige Beziehung der zwei, die Aufgabe lösenden, Linien anlangt, so erhellet, dass, wenn P', Q', R', S' die Punkte heissen, in denen die zweite

*) Die hieraus fliessenden Bedingungen für die Lage der Punkte E, F, G, H in den Linien AC, BD, .., so wie die hieraus folgende Lage von P und Q in AB und CD, wird man sich leicht selbst entwickeln.

Linie die Geraden AB, CD, EF, GH schneidet, wegen des Wurzelzeichens die Werthe der Verhältnisse $AP:PB$ und $AP':P'B$, $CQ:QD$ und $CQ':Q'D$, etc. paarweise einander gleich, aber entgegengesetzt sind, oder, was dasselbe ausdrückt, dass

$$(A,B,P,P')=(C,D,Q,Q')=(E,F,R,R')=(G,H,S,S')=-1;$$

d. i. jede der vier gegebenen Geraden AB, CD, EF, GH wird von den zwei gesuchten harmonisch getheilt.

So wie endlich $P=-R+S$, $Q=-\sqrt{a}R+S$, eben so ist $P'=-R'+S'$, $Q'=+\sqrt{a}R'+S'$, und folglich:

$$(P,Q,R,S)=-(P',Q',R',S')=\sqrt{a}.$$

§. 246. Von den vier Geraden AB, CD, EF, GH, welche im vorigen §. mit einer einzigen Geraden geschnitten werden sollten, waren die beiden ersten ein Paar gegenüberstehender Seiten einer dreiseitigen Pyramide, während die dritte und vierte die beiden andern Paare gegenüberstehender Seiten der Pyramide durchschnitten. Es kann nun hierbei noch die Frage aufgeworfen werden, ob nicht jedwede vier Gerade, von denen keine zwei in einer Ebene liegen, auf die eben besagte Weise sich auf einander beziehen lassen, ob also nicht durch die Rechnung des vorigen §. die Aufgabe, eine Gerade zu finden, welche vier andere gegebene schneidet, ganz allgemein gelöst sey.

Um dieses näher zu untersuchen, mögen AB, CD, EF, GH (Fig. 55.) irgend vier gerade Linien in dem Raume vorstellen. Man lege durch AB und einen beliebig gewählten Punkt C der Geraden CD eine Ebene, welche EF in E und GH in G schneide, und ziehe CE und CG, welche AB resp. in A und B treffen. Man lege ferner durch B und CD eine Ebene, welche der EF in F begegne, ziehe BF, welche CD in D schneide, und

ziehe AD. — Im Allgemeinen wird es nun zwar nicht der Fall seyn, dass AD, wie erfordert wird, auch durch GH geht. Weil aber der Punkt C willkührlich in CD genommen worden ist, und man durch eine andere Annahme von C auch A und D in den Linien AB und CD an andern Orten erhält, so scheint es allerdings, als ob C so gewählt werden könne, dass AD zugleich die GH schneide. Indessen geschieht dieses im Allgemeinen keineswegs; vielmehr soll sogleich gezeigt werden, dass, wenn für eine gewisse Annahme von C, AD und GH sich schneiden, dasselbe auch für jedes anders gewählte C erfolgt, dass mithin, wenn für ein gewisses C der Durchschnitt von AD und GH nicht erfolgt, derselbe auch für kein anderes C statt findet; dass folglich die Lage der vier Linien AB, CD,.. im vorigen §. nur eine specielle ist.

Dieses kann man auch schon aus der oben gefundenen Gleichung: $(P, Q, R, S) = -(P', Q', R', S')$, folgern. — Man nehme zwei Gerade p und p', welche nicht in einer Ebene liegen, und in jeder derselben vier Punkte nach Belieben: P, Q, R, S in p; $P', .. S'$ in p'. Man ziehe hierauf die vier Geraden: PP', QQ', RR', SS'. Wird nun umgekehrt eine Gerade verlangt, welche diese vier Geraden zugleich schneidet, so wird dieser Forderung jede der beiden Geraden p und p', und keine andere, Genüge leisten. (Denn die hierzu oben gegebene geometrische Auflösung vermittelst des Hyperboloids beschränkt sich nicht auf eine specielle Lage der vier Linien, und die Antwort muss folglich jederzeit von quadratischer Beschaffenheit seyn.) Die vier gegebenen Geraden PP', QQ',.. können daher von den gesuchten in keinen andern Punkten, als in den vorhin von einander ganz unabhängig genommenen $P, .. S$ und $P', .. S'$ getroffen werden. Die obige Gleichheit der D.verhältnisse zwischen diesen Punkten giebt folglich eine specielle Lage der vier Linien $AB, .. GH$ zu erkennen.

In der Pyramide ABCD werden die gegenüberstehenden Seiten AC, BD von der Geraden EF in E, F, und die gegenüberstehenden Seiten BC, AD von der Geraden GH in G, H getroffen. Wird nun eine zweite

Pyramide $A'B'C'D'$ construirt, dergestalt, dass die Seite $A'B'$ mit AB und die Seite $C'D'$ mit CD in derselben Geraden liegt, und dass $A'C'$ und $B'D'$ von EF, und $B'C'$ von GH geschnitten werden, so wird GH auch der $A'D'$ begegnen.

Beweis. Die Construction der zweiten Pyramide $A'B'C'D'$ ist folgende. Man nehme in CD beliebig die Spitze C'; alsdann schneidet eine Ebene durch C' und EF die AB in A', eine zweite Ebene durch C' und GH die AB in B', eine dritte Ebene durch B' und EF die CD in D'; und es ist jetzt noch zu erweisen, dass eine vierte Ebene durch A' und GH die CD ebenfalls in D' trifft. —

Sey wie vorhin $E=A+C$, $F=B+D$, $G=B+C$
$H=aA+D$ u. überdies $C'=cC+D$.

Hieraus folgt:

$$cE+F-C'=cA+B=A',$$
$$cG+H-C'=aA+cB=B';$$

und daraus weiter:

$$aE+cF-B'=aC+cD=D',$$
$$aG+cH-aA'=aC+cD.$$

Mithin wird CD von den Ebenen EFB' und GHA' in einem und demselben Punkte $D'=aC+cD$ geschnitten, wie zu erweisen war.

Noch sind bei dieser Figur folgende Relationen zwischen D.verhältnissen zu bemerken. Man setze, den bisherigen Bezeichnungen analog:

$A'C'\cdot EF\equiv E'$, $B'D'\cdot EF\equiv F'$, $B'C'\cdot GH\equiv G'$, $A'D'\cdot GH\equiv H'$,

und man hat vermöge der vorigen Gleichungen:

$$E'=cE+F,\quad G'=cG+H,$$
$$F'=aE+cF,\quad H'=aG+cH,$$

und aus diesen allen:

$$(A,B,A',B')=(C,D,C',D')=(E,F,E',F')=(G,H,G',H')=\frac{a}{c^2}.$$

Schlussbemerkungen.

§. 247. So wie jede der bisher erklärten fünf Verwandtschaften zu einer besondern Art geometrischer Aufgaben führt, eben so kann auch umgekehrt jede Aufgabe der niedern Geometrie, wo aus gewissen, in hinreichender Anzahl gegebenen Stücken eines Systems von Punkten, Geraden, oder Ebenen, andere Stücke des Systems gefunden werden sollen, aus einer der fünf Verwandtschaften entsprungen, angesehen werden. Sind nämlich die gegebenen Stücke von der Anzahl und Beschaffenheit, dass damit ein dem System, zu welchem sie gehören, gleiches und ähnliches, oder bloss ähnliches, u. s. w. construirt werden kann, so wird man die Aufgabe zu der Verwandtschaft der Gleichheit und Aehnlichkeit, der Aehnlichkeit allein, u. s. w. zu rechnen haben. Alle Aufgaben der genannten Art lassen sich daher in fünf Classen theilen.

Folgende Tafel giebt eine Uebersicht hiervon, und damit zugleich von den Hauptsätzen, welche in diesem Abschnitte gefunden worden sind. Zur linken Hand stehen die fünf Arten von Verwandtschaften, aus denen die Aufgaben ihren Ursprung nehmen. Die drei darauf folgenden mit I., II., III. bezeichneten Columnen enthalten die Anzahl der von einander unabhängigen Stücke, welche bei einem Systeme von n Punkten in einer Geraden, oder in einer Ebene, oder im Raume gegeben seyn müssen, um daraus die übrigen finden zu können. Zur rechten Seite dieser Columnen ist die Beschaffenheit der

gegebenen und gesuchten Stücke bemerkt. Bei den aus der Gleichheit und Aehnlichkeit entspringenden Aufgaben ist diese Angabe weggelassen, weil aus der Anzahl der Stücke und der Bedingung ihrer gegenseitigen Unabhängigkeit die Beschaffenheit, wenigstens die negative, schon erkannt wird. (Bei n Punkten in einer Ebene z. B. kann zwischen $2n-3$ Stücken, welche bloss Verhältnisse sind, keine Unabhängigkeit statt finden.) Eben so ist es bei den Aufgaben, welchen die Aehnlichkeit zum Grunde liegt, hinreichend, zu wissen, dass die gegebenen Stücke nicht räumliche Grössen selbst, sondern nur Verhältnisse zwischen denselben seyn dürfen. Dass man aber zu diesen Verhältnissen nicht bloss Verhältnisse zwischen den Theilen des jedesmaligen Raums (Raumtheilen), in welchem die Figur enthalten ist (§. 154. zu Ende), oder nicht bloss Vl.verhältnisse nehmen darf, fliesst schon aus der Anzahl und der geforderten Unabhängigkeit der gegebenen Stücke, und war daher ebenfalls nicht nöthig zu bemerken. (So können $2n-4$ D.-verhältnisse bei n Punkten in einer Ebene nicht von einander unabhängig seyn.)

	I.	II.	III.	
Gleichh. u. Aehnlichk.	$n-1$	$2n-3$	$3n-6$	
Aehnlichk.	$n-2$	$2n-4$	$3n-7$	Verhältnisse.
Gleichheit	$n-1$	$2n-5$	$3n-11$	Raumtheile.
Affinität	$n-2$	$2n-6$	$3n-12$	Verhältnisse zwischen Raumtheilen.
Collin. Verwandtschaft	$n-3$	$2n-8$	$3n-15$	Vl.verhältnisse.

§. 248. Eine Aufgabe ist als gelöst zu betrachten, wenn zwischen den gegebenen Stücken und dem gesuchten eine Relation oder Gleichung gefunden worden ist.

Man kann hierdurch veranlasst werden, auch diese Relationen und die Eigenschaften der Figuren überhaupt in fünf Classen zu theilen, so dass nämlich eine Eigenschaft in die Classe, welche z. B. aus der Affinität entspringt, zu setzen wäre, wenn die Figur diese Eigenschaft mit allen ihr affinen Figuren, als solchen, gemein hätte. Da aber die Relationen zwischen den Theilen einer Figur nicht von der absoluten Grösse, sondern bloss von dem gegenseitigen Verhältniss der Theile abhängen, so kommt jede bei einer gewissen Figur statt findende Relation immer auch jeder andern Figur zu, welche der erstern ähnlich ist. Hiernach würden die beiden ersten Classen von Relationen, welche aus der Gleichheit und Aehnlichkeit und der Aehnlichkeit allein ihren Ursprung nehmen, in eine zusammengehen, so wie auch die beiden folgenden Classen, denen die Gleichheit und die Affinität zum Grunde liegt (§. 163. *b.*); oder vielmehr, man kann nur drei Classen von Eigenschaften der Figuren aufstellen: die erste geht hervor aus der Aehnlichkeit, die zweite aus der Affinität, und die dritte aus der Verwandtschaft der Collineation. Da ferner ähnliche Figuren zugleich affin, und affine Figuren zugleich collinear verwandt sind, so werden wir, um nicht die eine Classe in der andern eingeschlossen zu erhalten, auf folgende Weise diese Classen zu unterscheiden haben.

Eine Eigenschaft der d r i t t e n Classe findet zwischen solchen Verhältnissen und Bedingungen statt, welche die Figur mit einer andern gemein haben muss, wenn sie dieser andern collinear verwandt heissen soll. (D.- und Vl.verhältnisse und alle dadurch ausdrückbaren Bedingungen.)

Eine Eigenschaft ist zur z w e i t e n Classe zu rechnen, wenn sie zwischen solchen Verhältnissen einer Figur

besteht, die in allen affinen, nicht aber zugleich in bloss collinear verwandten, Figuren dieselben Werthe haben. (Verhältnisse zwischen Abschnitten einer Geraden, zwischen Theilen einer Ebene, zwischen Theilen des Raums, die sich nicht zu Vl.verhältnissen zusammensetzen lassen.*)

Alle übrigen Eigenschaften, bei welchen daher Verhältnisse vorkommen, die nur ähnliche, nicht aber zugleich affine Figuren mit einander gemein haben, bilden die erste Classe. (Verhältnisse zwischen Abschnitten verschiedener Geraden, zwischen Theilen verschiedener Ebenen, Winkel, als Functionen solcher Verhältnisse.)

Ganz übereinstimmend mit dieser Classificirung ist folgende, wobei die zur Entwickelung der Eigenschaften dienenden Hülfsmittel zum Eintheilungsgrunde genommen sind. — Jede Eigenschaft, welche sich mittelst des abgekürzten barycentrischen Calculs finden lässt, gehört zur dritten Classe. Die Eigenschaften, welche mit Hülfe des barycentrischen Calculs selbst und nicht zugleich mittelst des abgekürzten gefunden werden können, begründen die zweite Classe. Die Eigenschaften endlich, welche nicht durch den barycentrischen Calcul selbst und folglich auch nicht durch den abgekürzten erweislich sind, sondern wozu die Lehre von den Winkeln (der pythagorische Lehrsatz, trigonometrische Formeln, u. s. w.) unumgänglich erfordert wird, machen die erste Classe aus **).

Diese Eintheilung der Eigenschaften in Classen ist aber nicht bloss auf Systeme von Geraden und Ebenen

*) Z. B. die Relation in §. 160.: $\frac{A'D}{A'A} + \frac{B'D}{B'B} = \frac{DC}{C'C}$. (Fig. 32.)

**) Auszunehmen sind hiervon die Proportionen in §. 18. *b.* und §. 20. *b. c.*, welche die Grundlage des barycentrischen Calculs bilden, und zu deren Beweis die Lehre von den Winkeln gleichwohl nicht entbehrt werden kann.

beschränkt, sondern kann auch auf krumme Linien und Flächen ausgedehnt werden. Im Allgemeinen ist hiervon zu merken, dass in das Wesen des Krummen selbst die Eigenschaften der zweiten Classe weniger eingehen, als die der ersten, und die der dritten Classe noch weniger, als die der zweiten. Denn der nicht abgekürzte barycentrische Calcul kann mit Hülfe der Analysis des Unendlichen bloss Probleme der Quadratur *) und Kubatur behandeln. Rectificiren und Applaniren aber ist ohne Betrachtung von Winkeln unmöglich. Für den abgekürzten Calcul bleiben in dieser Hinsicht nur die Berührungen und die verschiedenen Ordnungen derselben zu untersuchen übrig, ausgenommen die Berührungen in unendlicher Entfernung oder die Lehre von den Asymptoten, welche noch Gegenstand des nicht abgekürzten Calculs seyn kann. Die Verschiedenheit der Krümmung aber, und folglich die Grösse des Krümmungshalbmessers kann nur mit Zuziehung von Winkeln untersucht werden und gehört daher zu den Gegenständen der ersten Classe.

Was insbesondere die Eigenschaften der Linien der zweiten Ordnung anlangt, mit denen wir uns, den barycentrischen Calcul zu Hülfe nehmend, sogleich näher beschäftigen werden, so gehören der ersten Classe eigenthümlich an, und können folglich hier nicht in Betracht kommen: der Unterschied zwischen Kreis und Ellipse,

*) Ist $pA+qB+rC$ der Ausdruck einer ebenen Curve, so findet sich, den Inhalt des F.dreiecks $ABC=1$ gesetzt, das Flächenelement, welches von einem Elemente der Curve und von den zwei, von A an die Endpunkte dieses Elements gezogenen, Geraden begränzt wird,

$$=\frac{q dr - r dq}{(p+q+r)^2}.$$

zwischen gleichseitiger und ungleichseitiger Hyperbel, die Lehre von den Hauptaxen und den Brennpunkten. Von der dritten Classe bleiben ausgeschlossen, können aber noch in der zweiten behandelt werden: der Unterschied zwischen den drei Arten der Kegelschnitte, die Lehren vom Mittelpunkte, von den conjugirten Diametern und den Asymptoten. Die Eigenschaften der dritten Classe finden für alle drei Arten von Kegelschnitten zugleich statt und betreffen hauptsächlich merkwürdige D.verhältnisse bei sehr einfachen, weder durch Winkel noch Parallelismus bedingten, Verbindungen gerader Linien mit Kegelschnitten, merkwürdige Lagen der durch solche Verbindungen bestimmten Punkte, u. dergl. m.

Dritter Abschnitt.

Anwendung
des
barycentrischen Calculs
auf die
Entwickelung mehrerer Eigenschaften
der
Kegelschnitte.

Erstes Capitel.

Bestimmung eines Kegelschnitts durch gegebene Punkte.

§. 249. Der allgemeine Ausdruck eines durch die drei F.punkte A, B, C beschriebenen Kegelschnitts ist (§. 64. 1.):

$$a(\nu-\beta)(\nu-\gamma)A+b(\nu-\gamma)(\nu-\alpha)B+c(\nu-\alpha)(\nu-\beta)C.$$

Es kann aber dieser Ausdruck bedeutend vereinfacht werden. Weil nämlich ein Kegelschnitt durch fünf Punkte bestimmt ist, und gegenwärtiger schon durch die drei F.punkte geht, folglich zu seiner völligen Bestimmung nur noch zwei gegebener Punkte bedarf, so müssen sich die sechs in dem Ausdrucke vorkommenden Constanten bis auf zwei vermindern lassen. Dieses kann folgendergestalt geschehen. — Man dividire den Ausdruck durch $(\nu-\gamma)(\nu-\alpha)$, so wird er:

$$a\frac{\nu-\beta}{\nu-\alpha}A+bB+c\frac{\nu-\beta}{\nu-\gamma}C.$$

Nun hat man die identische Gleichung:

$$(\beta-\gamma)(\nu-\alpha)+(\gamma-\alpha)(\nu-\beta)+(\alpha-\beta)(\nu-\gamma)=0.$$

Setzt man daher:

$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\alpha}\cdot\frac{\nu-\gamma}{\nu-\beta}=-x, \quad \text{so wird} \quad \frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha}\cdot\frac{\nu-\alpha}{\nu-\beta}=-1+x.$$

Hiermit in dem Ausdrucke statt ν die Grösse x als Veränderliche eingeführt, erhält man:

$$\frac{a(\beta-\gamma)}{(\gamma-\alpha)(1-x)}A - bB + \frac{c(\alpha-\beta)}{(\gamma-\alpha)x}C,$$

und wenn man die Constanten

$$a(\beta-\gamma)=f,\ b(\gamma-\alpha)=g,\ c(\alpha-\beta)=h \text{ setzt:}$$

$$\text{I.}\ \begin{cases} \dfrac{f}{1-x}A - gB + \dfrac{h}{x}C, \text{ oder} \\ fxA - gx(1-x)B + h(1-x)C, \end{cases}$$

wo von den drei noch übrigen Constanten f, g, h die eine nach Belieben, z. B. $=1$, genommen werden kann, welches wir aber, um die Symmetrie nicht zu stören, unterlassen wollen.

§. 250. Die Verhältnisse $f:g:h$ werden im Allgemeinen (bei der Ellipse und Hyperbel) bestimmt, wenn nächst den drei F.punkten noch zwei andere Punkte gegeben sind, durch welche die Curve gehen soll. Sey der eine dieser Punkte

$$D \equiv aA + bB + cC,$$

so folgt durch Vergleichung seines Ausdrucks mit dem des Kegelschnitts I. (§. 24. a.):

$$\frac{f}{1-x} : -g : \frac{h}{x} = a:b:c,$$

$$\text{mithin } \frac{f}{a} : \frac{g}{b} : \frac{h}{c} = 1-x : -1 : x,$$

$$\text{und daher} \qquad 1)\ \frac{f}{a} + \frac{g}{b} + \frac{h}{c} = 0,$$

die Bedingungsgleichung dafür, dass der Punkt D in dem Kegelschnitte I. enthalten ist.

Sey der andere Punkt, durch welchen der Kegelschnitt noch beschrieben werden soll,

$$E \equiv a'A + b'B + c'C,$$

so findet sich eben so

$$2) \quad \frac{f}{a'}+\frac{g}{b'}+\frac{h}{c'}=0,$$

und durch Verbindung dieser Gleichung mit der vorigen:

$$f:g:h=\left(\frac{1}{bc'}-\frac{1}{b'c}\right):\left(\frac{1}{ca'}-\frac{1}{c'a}\right):\left(\frac{1}{ab'}-\frac{1}{a'b}\right).$$
$$=a(\beta-\gamma):b(\gamma-\alpha):c(\alpha-\beta),$$

wenn man $a'=\frac{a}{\alpha}$, $b'=\frac{b}{\beta}$, $c'=\frac{c}{\gamma}$ zur Abkürzung setzt.

Der Ausdruck für den durch die fünf Punkte A, B, C, D, E beschriebenen Kegelschnitt ist mithin:

$$a(\beta-\gamma)xA-b(\gamma-\alpha)x(1-x)B+c(\alpha-\beta)(1-x)C.$$

Durch A geht die Curve für $x=1$, durch B für $x=\infty$, durch C für $x=0$, durch D für $x=-(\alpha-\beta):(\gamma-\alpha)$, durch E für $x=-\gamma(\alpha-\beta):\beta(\gamma-\alpha)$.

Setzt man in diesem Ausdrucke $(\alpha-\beta):(\gamma-\alpha)=-m$ und folglich $(\beta-\gamma):(\gamma-\alpha)=-1+m$, so reducirt er sich auf

$$\text{II.} \quad a(1-m)xA+bx(1-x)B+cm(1-x)C,$$

welches, wenn m unbestimmt gelassen wird, der allgemeine Ausdruck für jeden Kegelschnitt ist, in welchem die vier Punkte A, B, C, D liegen. — Denselben erhält man auch schon, wenn man, zufolge der Gleichung 1), $\frac{f}{a}:\frac{g}{b}:\frac{h}{c}=1-m:-1:m$ setzt, wodurch $f:g:h=a(1-m):-b:cm$ wird.

§. 251. Sey jetzt $D\equiv aA+bB+cC$ irgend ein in der Ebene des Kegelschnitts I. befindlicher Punkt, und durch denselben an den Kegelschnitt eine Tangente zu

legen. — Der Ausdruck für die Tangente an I. in dem Punkte, für welchen $x = x'$ ist, findet sich nach §. 77.:

$$\frac{f}{(1-x')^2}(1-x'+v)A - gB + \frac{h}{x'^2}(x'-v)C.$$

Soll nun diese Tangente, wie gefordert wird, durch den Punkt $aA+bB+cC$ gehen, so muss sich verhalten:

$$\frac{f}{(1-x')^2}(1-x'+v) : -g : \frac{h}{x'^2}(x'-v) = a:b:c,$$

oder, wenn man einstweilen $\frac{a}{f} = i$, $\frac{b}{g} = k$, $\frac{c}{h} = l$ setzt:

$$1-x'+v : -1 : x'-v = i(1-x')^2 : k : lx'^2.$$

Dies giebt: $i(1-x')^2 + k + lx'^2 = 0$,

die Gleichung, durch deren Auflösung man den Werth von x für den Berührungspunkt erhält, und somit die Tangente ziehen kann. Es ist aber diese Gleichung nach x' geordnet:

$$(i+l)x'^2 - 2ix' + i + k = 0,$$

und ihre zwei Wurzeln sind mithin möglich und verschieden, oder möglich und gleich, oder unmöglich, je nachdem

$$(i+l)(i+k) - i^2 = kl + li + ik$$
$$= \frac{a}{f}\frac{b}{g}\frac{c}{h}\left(\frac{f}{a}+\frac{g}{b}+\frac{h}{c}\right)$$

negativ, null, oder positiv ist. Im ersten Falle lassen sich von dem gegebenen Punkte an den Kegelschnitt zwei verschiedene Tangenten, in dem zweiten zwei identische, in dem dritten gar keine ziehen. Das Erste findet statt, wenn der Punkt auf der erhabenen Seite, also ausserhalb des Kegelschnitts, liegt; das Zweite, wenn er ein Punkt der Curve selbst ist; das Dritte ereignet sich, wenn er auf der hohlen Seite und mithin innerhalb des Kegelschnitts liegt. Wir ziehen hieraus die Folgerung:

Der Punkt $aA+bB+cC$ liegt innerhalb oder ausserhalb des Kegelschnitts I., je nachdem die Summe der drei Quotienten $\frac{f}{a}$, $\frac{g}{b}$, $\frac{h}{c}$ mit dem Producte derselben einerlei oder verschiedene Zeichen hat. Ist aber diese Summe $=0$, so liegt der Punkt in dem Kegelschnitte selbst, wie schon in dem vorigen §. gefunden worden.

§. 252. Ein durch seinen Ausdruck gegebener Kegelschnitt ist eine Hyperbel, oder Ellipse, je nachdem die Coëfficientensumme des Ausdrucks in zwei reelle Factoren zerlegbar ist, oder nicht. Sind die Factoren reell und gleich, so ist der Kegelschnitt eine Parabel. (§. 61. bis 63.).

Nun ist die Coëfficientensumme des Ausdrucks I.:

$$fx-gx(1-x)+h(1-x)=gx^2-(g+h-f)x+h,$$

und der Ausdruck gehört folglich einer Hyperbel, Parabel, oder Ellipse an, je nachdem

$$(g+h-f)^2-4gh=f^2+g^2+h^2-2(gh+hf+fg)$$

positiv, null, oder negativ ist.

Für die Parabel insbesondere wird daher erfordert: $g+h-f=2\sqrt{gh}$, folglich $f=(\sqrt{g}-\sqrt{h})^2$. Der Ausdruck für eine Parabel, welche durch die drei F.punkte geht, ist demnach:

$$(\sqrt{g}-\sqrt{h})^2\,xA-gx(1-x)\,B+h(1-x)\,C,$$

oder einfacher, wenn man $\sqrt{\frac{h}{g}}=e$ setzt:

$$(1-e)^2\,xA-x(1-x)\,B+e^2(1-x)\,C,$$

wobei die Summe der Coëfficienten $=(e-x)^2$.

§. 253. Weil in diesem Ausdrucke für die Parabel nur eine Constante noch zurück ist, *so ist eine Parabel schon durch vier Punkte vollkommen bestimmt.*

Sey daher nächst A, B und C, der vierte Punkt, durch den die Parabel geführt werden soll,

$$D \equiv aA + bB + cC,$$

so hat man zur Bestimmung von e die quadratische Gleichung (§. 250. 1).):

$$\frac{(1-e)^2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{e^2}{c} = 0, \text{ od. } (a+c)be^2 - 2bce + (a+b)c = 0.$$

Es folgt hieraus, dass sich durch die vier Punkte A, B, C, D im Allgemeinen entweder zwei verschiedene Parabeln, oder gar keine beschreiben lassen, je nachdem nämlich die beiden Wurzeln dieser nach e aufgelösten Gleichung reell oder imaginär sind, je nachdem also die Grösse

$$b^2c^2 - (a+b)(a+c)bc = -abc(a+b+c)$$

$= abcd$, wenn man $a+b+c+d=0$ setzt, einen positiven oder negativen Werth hat. Ist aber dieses Product positiv, so sind zwei seiner Factoren positiv, die beiden andern negativ, und alsdann liegt jeder der vier Punkte A, B, C, D ausserhalb des von den drei übrigen gebildeten Dreiecks (§. 32. Zus.). Ist hingegen das Product negativ, so hat der eine Factor das entgegengesetzte Zeichen von dem der drei übrigen, und der eine Punkt, welchem dieser Factor als Coëfficient zukommt, liegt innerhalb des Dreiecks, zu welchem die drei andern Punkte die Spitzen abgeben. — Also:

Haben vier Punkte in einer Ebene eine solche Lage gegen einander, dass jeder derselben ausserhalb des Dreiecks, welches die drei andern bilden, befindlich ist, so lassen sich durch sie zwei verschiedene Parabeln beschreiben. Liegt dagegen einer der vier Punkte innerhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks, so kann durch sie keine Parabel beschrieben werden.

In dem vorhin nicht berührten Falle, wo das Product $abc(a+b+c) = o$ wird, und die beiden Wurzeln der Gleichung einander gleich werden, gehen die zwei möglichen Parabeln in eine zusammen. Wird nämlich von den vier Factoren jenes Products einer der drei ersten, z. B. $a, = o$, so fällt D in die F.linie BC. Wenn nun, vor dem wirklichen Einfallen, durch die vier Punkte zwei Parabeln construirbar waren, so wird jede dieser Parabeln, je näher D an BC rückt, sich desto mehr der Geraden BC und der durch A damit gezogenen Parallele nähern, bis dass, wenn D in BC selbst zu liegen kommt, jede Parabel in das System dieser zwei Parallelen übergeht.

Setzen wir zweitens den Factor $a+b+c=o$, so wird D ein unendlich entfernter Punkt, und es erhellet, dass, je weiter sich D von A, B, C entfernt, doch so, dass immer zwei Parabeln zu construiren möglich bleiben, diese zwei Parabeln sich desto mehr aneinander schliessen werden, bis sie für ein unendlich entferntes D in eine zusammenfallen, welche nächst A, B, C noch durch die Richtung bestimmt wird, nach welcher D liegt, und welcher die Durchmesser der Parabel parallel seyn müssen.

§. 254. Ziehen wir jetzt ausser den Parabeln noch die andern Kegelschnitte in Betracht, welche durch die vier Punkte A, B, C, D beschrieben werden können. — Der allgemeine Ausdruck für diese Curven II. mit dem Ausdrucke I. verglichen, giebt $f=a(1-m)$, $g=-b$, $h=cm$, oder $f=ap$, $g=bq$, $h=cr$, wenn man der Symmetrie willen die Verhältnisszahlen $1-m=p$, $-1=q$, $m=r$ setzt, wo daher $p+q+r=o$. Hierdurch verwandelt sich die Formel $f^2+g^2+h^2-2gh-2hf-2fg$ (§. 252.) in

$$a^2p^2+b^2q^2+c^2r^2-2bcqr-2carp-2abpq.$$

Weil man aber, wegen $p+q+r=o$, die Coëfficienten von a^2, b^2, c^2:

$$p^2=-rp-pq,\quad q^2=-pq-qr,\quad r^2=-qr-rp$$

setzen kann, so zieht sich die Formel zusammen in:

$$-(b+c)^2qr-(c+a)^2rp-(a+b)^2pq,$$

und wird, wenn man wieder m einführt:

$$(b+c)^2m-(c+a)^2m(1-m)+(a+b)^2(1-m).$$

Der durch die vier Punkte A, B, C und $aA + bB + cC$ beschriebene Kegelschnitt II. ist also eine Hyperbel, Parabel, oder Ellipse (§. 252.), je nachdem die letzterhaltene Formel $(= f^2 + .. - 2gh - ..)$ positiv, null, oder negativ ist. Soll aber diese Function von m, die wir in dem Folgenden mit M bezeichnen wollen, null werden können, soll es also möglich seyn, durch die vier Punkte Parabeln zu beschreiben, so muss M, nach m aufgelöst, in zwei reelle Factoren zerlegbar seyn. Hierzu wird erfordert (vergl. §. 252.), dass, wenn man

$$b + c = i,\ c + a = k,\ a + b = l \text{ setzt,}$$

$$i^4 + k^4 + l^4 - 2k^2l^2 - 2l^2i^2 - 2i^2k^2$$
$$= -(-i + k + l)(i - k + l)(i + k - l)(i + k + l)$$
$$= -16abc(a + b + c) = 16abcd$$

eine positive Grösse sey, was wir auch schon im vorigen §. als Kennzeichen für die Parabel gefunden haben. Zugleich aber erhellet, dass alsdann M für zwei verschiedene Werthe von m, $= 0$, und daher für andere Werthe von m bald positiv bald negativ wird. Ist dagegen $abcd$ negativ, so kann M niemals null werden, sondern behält für jeden Werth von m ein und dasselbe Zeichen, und zwar das positive, weil es sich unter andern für $m = 0$ auf $(a + b)^2$ reducirt. — Da nun einem positiven M die Hyperbel, einem negativen die Ellipse, und einem verschwindenden die Parabel zugehört; da ferner, nachdem $abcd$ positiv oder negativ ist, die vier Punkte $A, .. D$ die eine oder die andere der zwei im Allgemeinen möglichen Lagen gegen einander haben (vor. §.): so ist das eben erhaltene Resultat, geometrisch ausgedrückt, folgendes:

Wenn von vier Punkten in einer Ebene, jeder derselben ausserhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks liegt, so lassen sich durch sie sowohl Ellipsen

als Hyperbeln und zwei verschiedene Parabeln beschreiben. Liegt aber der eine innerhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks, so können durch sie weder Ellipsen noch Parabeln, sondern bloss Hyperbeln geführt werden.

Heisse in dem Folgenden der Kürze willen die erstere Lage von vier Punkten die parabolische, und die letztere die hyperbolische.

§. 255. Wir wollen nunmehr die Untersuchung auf ein System von fünf Punkten A, B, C, D, E in einer Ebene ausdehnen, und aus der gegenseitigen Lage derselben die Art des einzigen durch sie bestimmten Kegelschnitts zu erforschen suchen. Hierzu schicken wir folgenden leicht erweislichen Satz voraus.

Hat man ein System von fünf Punkten in einer Ebene, von denen keine drei in einer Geraden liegen, so giebt es unter den fünf Quaternionen, welche sich, je vier dieser Punkte besonders genommen, bilden lassen, wenigstens eine, deren vier Punkte eine parabolische Lage zu einander haben.

Unter den fünf Punkten $A, \ldots E$ seyen nun die vier ersten A, B, C, D (Fig. 56.) die Punkte einer solchen Quaternion, und zwar so, dass die Geraden AC und BD sich innerhalb ihrer Endpunkte schneiden (§. 32. Zus.). Man ziehe die vier Geraden AB, BC, CD, DA. Durch sie wird im Allgemeinen die Ebene in eilf Theile zerlegt, von denen die vier, welche von aussen an die Seiten des Vierecks $ABCD$ grenzen, mit G, die übrigen sieben mit H bezeichnet worden sind. Liegt nun der fünfte Punkt E in einem dieser letztern Theile, so ist aus der Figur ersichtlich, dass es alsdann immer drei von den Punkten A, B, C, D giebt, mit denen sich E in hyperbolischer Lage befindet, dass also in diesem Falle durch die fünf

Punkte immer eine Hyperbel bestimmt wird. Liegt aber der Punkt E in einem der vier mit G benannten Theile, so sind sämmtliche fünf Quaternionen der fünf Punkte parabolisch, und es kann mithin, nach der jedesmaligen besondern Lage des Punktes E in diesen Theilen, durch ihn und die vier übrigen bald eine Hyperbel, bald eine Ellipse, bald eine Parabel beschrieben werden, oder, wie wir uns kurz ausdrücken wollen: E ist alsdann bald hyperbolisch, bald elliptisch, bald parabolisch. Um zu bestimmen, wenn er das letztere ist, beschreibe man durch A, B, C, D die zwei möglichen Parabeln (Fig. 57.), die also nur durch die Räume G sich fortziehen können. Liegt nun der Punkt E in einer dieser Parabeln selbst, so ist er parabolisch; liegt er nicht darin, so ist er es nicht, indem sonst durch A, B, C, D noch andere Parabeln müssten beschrieben werden können, welches nicht möglich ist.

Es wird aber durch diese zwei Parabeln die Ebene in sechs Räume abgesondert. Der eine ist das von den Parabelbögen AB, BC, CD, DA eingeschlossene Viereck und gehört beiden Parabelflächen gemeinschaftlich. Vier andere, welche in der Figur mit L bezeichnet sind und an die Seiten dieses Vierecks grenzen, liegen innerhalb der einen und ausserhalb der andern Parabel. Ausserhalb beider Parabeln liegt der noch übrige sechste Raum. Ich behaupte nun, dass alle Punkte eines und desselben dieser Räume von einerlei Beschaffenheit sind, nämlich alle entweder hyperbolisch, oder alle elliptisch; und beweise dieses folgendergestalt.

Der Werth von m (§. 250. u. §. 254.) ist bekannt, sobald nächst den vier Punkten $A, .. D$, die hierbei als fest betrachtet werden, noch der fünfte E gegeben ist. Jedem Orte von E entspricht daher ein gewisser Werth

von m, und folglich auch von M, als einer Function von m. Liegt E in einer der Parabeln selbst, so ist $M = o$, und umgekehrt. Denken wir uns nun den Punkt E nach Belieben sich stetig fortbewegend, jedoch so, dass er dabei keiner der beiden Parabeln begegnet, und folglich in demjenigen der sechs Räume, in welchem er beim Anfange der Bewegung ist, fortwährend bleibt, so wird auch die Function M sich stetig ändern, aber nicht $= o$ werden, und folglich immerfort dasselbe Zeichen behalten. *) Da aber, je nachdem M positiv oder negativ ist, die fünf Punkte in einer Hyperbel oder Ellipse liegen, und mithin der Punkt E zu den hyperbolischen oder elliptischen gehört, so ist damit die Richtigkeit der obigen Behauptung dargethan.

Nun waren alle Punkte des geradlinigen Vierecks $ABCD$ hyperbolisch, mithin müssen es auch alle Punkte des mit den Parabelbögen begrenzten Vierecks seyn; und eben so folgt, dass alle Punkte des sechsten, von den beiden Parabeln ausgeschlossenen, Raums hyperbolisch sind. Von den vier übrigen mit L bezeichneten Räumen wird aber jeder bloss elliptische Punkte enthalten. Denn denkt man sich durch A, B, C, D eine Ellipse beschrieben, so kann diese nur in den Räumen L enthalten seyn, wird aber durch jeden dieser Räume gehen, weil sie eine in sich zurücklaufende Linie ohne Spitzen ist. Folglich giebt es in jedem der Räume L eine Reihe elliptischer Punkte, folglich müssen alle Punkte eines jeden dieser vier Räume elliptisch seyn.

*) M ist eine quadratische Function von m, und kann daher nur durch o, nicht auch durch ∞, aus dem Positiven in das Negative, und umgekehrt, übergehen. — Es wird $m = \infty$, und folglich $M = \infty^2$, für $\alpha = \gamma$, d. i. $a : a' = c : c'$, folglich, wenn E in die Gerade BD zu liegen kommt.

Das Resultat unserer Untersuchung ist daher übersichtlich folgendes:

Aufgabe. In einer Ebene sind fünf Punkte gegeben, von denen keine drei in einer Geraden liegen. Die Art des Kegelschnitts zu bestimmen, welcher durch die fünf Punkte beschrieben werden kann.

Auflösung. Unter den fünf Punkten lassen sich immer vier auswählen, von denen jeder ausserhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks liegt. Es sey dieses geschehen, und man beschreibe durch solche vier Punkte zwei Parabeln, was immer möglich ist. *) *Liegt nun der fünfte Punkt in einer dieser Parabeln selbst, so ist diese Parabel der Kegelschnitt, welcher sich durch alle fünf Punkte beschreiben lässt. Liegt der Punkt innerhalb beider Parabeln, oder ausserhalb beider, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel. Ist er dagegen innerhalb der einen und ausserhalb der andern befindlich, so liegt er mit den vier übrigen in einer Ellipse.*

§. 256. Zusätze. *a.* Stellt man sich durch die vier Punkte A, B, C, D (Fig. 57.) alle möglichen Kegelschnitte beschrieben vor, so wird durch jeden fünften Punkt der Ebene einer derselben gehen, und folglich die Ebene mit Kegelschnitten ganz überdeckt seyn. Weil ferner durch fünf Punkte ein Kegelschnitt vollkommen bestimmt ist, so werden sich je zwei derselben nur in den, ihnen allen gemeinschaftlichen, Punkten A, B, C, D schneiden; an jeder andern Stelle der Ebene aber werden die zu-

*) Sind die Geraden AB und CD (Fig. 57.) einander parallel, so ist die Parabel $BADC$ dem System dieser Parallelen gleich zu achten; und wenn auch AD mit BC parallel ist, so hat man die vier ins Unendliche verlängerten Seiten des Parallelogramms $ABCD$ für die zwei Parabeln zu nehmen.

nächst liegenden Elemente dieser Curven einander parallel seyn. Endlich werden in die vier Räume L bloss elliptische Bögen fallen, und die zwei übrigen bloss mit hyperbolischen Bögen angefüllt seyn.

b. Durch vier Punkte einer Ebene, von denen der eine innerhalb der drei andern liegt, lassen sich nur Hyperbeln beschreiben. Man denke sich ähnlicherweise durch solche vier Punkte alle nur möglichen Hyperbeln beschrieben, so wird auch hiermit die ganze Ebene überzogen seyn, und keine zwei derselben werden sich irgendwo anders, als in den vier Punkten schneiden.

c. Auf eine dritte Weise eine Ebene mit Kegelschnitten zu überziehen, welche sämmtlich durch vier Punkte der Ebene gehen, ist nicht möglich, weil vier Punkte einer Ebene im Allgemeinen nur eine der zwei in *a.* und *b.* angenommenen Lagen gegen einander haben können.

d. Da jede dieser beiden Lagen gleich gut möglich ist, und weil die Fläche einer sich in das Unendliche erstreckenden Parabel sich zu der unendlichen Ebene, in welcher sie liegt, wie eine endliche Grösse zu $\sqrt{\infty}$ verhält, *so kann man immer die Quadratwurzel aus dem Unendlichen gegen ein Endliches wetten, dass fünf in einer Ebene willkührlich genommene Punkte eher in einer Hyperbel, als in einer Ellipse liegen.*

§. 257. Die Bestimmungsweise der Art eines Kegelschnitts nach der jedesmaligen Lage des fünften Punktes gegen die zwei durch die vier ersten Punkte möglichen Parabeln lässt sich auch folgendergestalt bloss durch Calcul als richtig darthun.

Der Ausdruck für einen durch $A, B, C, D \equiv aA + bB + cC$ gehenden Kegelschnitt ist (§. 250.):

$$a(1-m)xA+bx(1-x)B+cm(1-x)C;$$

und ein solcher Kegelschnitt eine Parabel, wenn (§. 254.):

$$(b+c)^2 m-(c+a)^2 m(1-m)+(a+b)^2(1-m)=M=0.$$

Heissen demnach m' und m'' die beiden Wurzeln dieser nach m aufgelösten quadratischen Gleichung, so geben dieselben im Ausdrucke des Kegelschnitts nach einander substituirt, die Ausdrücke der zwei durch A, B, C, D möglichen Parabeln selbst.

Der fünfte Punkt $E\equiv a'A+b'B+c'C$ liegt nun nach §. 251. innerhalb oder ausserhalb der einen Parabel, für welche $m=m'$, und mithin $f=a(1-m')$, $g=-b$, $h=cm'$ ist, je nachdem

$$-\frac{a(1-m')}{a'}\cdot\frac{b}{b'}\cdot\frac{cm'}{c'}\left[\frac{a(1-m')}{a'}-\frac{b}{b'}+\frac{cm'}{c'}\right]$$

$$=-\alpha\beta\gamma(1-m')m'[\alpha-\beta+(\gamma-\alpha)m'] \quad (§. 250.)$$

positiv oder negativ ist; und eben so innerhalb oder ausserhalb der andern Parabel, für welche $m=m''$, je nachdem

$$-\alpha\beta\gamma(1-m'')m''[\alpha-\beta+(\gamma-\alpha)m'']$$

positiv oder negativ ist. E liegt folglich innerhalb beider Parabeln, oder ausserhalb beider, wenn

$$m'm''(1-m')(1-m'')[\alpha-\beta+(\gamma-\alpha)m'][\alpha-\beta+(\gamma-\alpha)m'']$$

positiv; dagegen innerhalb der einen und ausserhalb der andern, wenn dieselbe Grösse negativ ist. Es fliesst aber aus der quadratischen Gleichung $M=0$, dass $m'm'' =\left(\frac{a+b}{c+a}\right)^2$; und eben so, wenn man m mit $1-m$, und a mit c gegenseitig vertauscht, als wodurch die Formel M unverändert bleibt: $(1-m')(1-m'')=\left(\frac{b+c}{c+a}\right)^2$.

Mithin ist das Product $m'm''(1-m')(1-m'')$ immer positiv, und die eben gedachten zwei Bedingungen reduciren sich auf

$$[\alpha-\beta+(\gamma-\alpha)m'][\alpha-\beta+(\gamma-\alpha)m'']>, <0.$$

Es sind ferner die Bedingungen, unter welchen ein durch A, B, C, D gehender Kegelschnitt eine Hyperbel oder Ellipse ist (§. 254.):

$$M=(c+a)^2(m-m')(m-m'')>, <0.$$

Mithin ist der durch A, B, C, D, E zu beschreibende Kegelschnitt, als für welchen nach §. 250. $m=-\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\alpha}$, eine Hyperbel oder Ellipse, je nachdem

$$[\alpha-\beta+(\gamma-\alpha)m'][\alpha-\beta+(\gamma-\alpha)m'']>\text{ oder }<0,$$

Bedingungen, welche mit den vorigen, die Lage von E gegen die zwei Parabeln betreffend, auf die erforderliche Weise übereinstimmen.

Zweites Capitel.

Bestimmung eines Kegelschnitts durch gegebene Tangenten.

§. 258. Der allgemeine Ausdruck für einen Kegelschnitt, der von den drei F.linien BC, CA, AB berührt wird, ist nach §. 64. 2.:

$$a(\nu-\alpha)^2 A + b(\nu-\beta)^2 B + c(\nu-\gamma)^2 C.$$

Es lässt sich aber dieser Ausdruck auf ganz ähnliche Weise, wie der Ausdruck in §. 249., vereinfachen, indem man

$$\nu-\alpha=\frac{p}{\beta-\gamma},\quad \nu-\beta=\frac{q}{\gamma-\alpha},\quad \nu-\gamma=\frac{r}{\alpha-\beta},$$

und sodann

$$\frac{a}{(\beta-\gamma)^2}=i,\quad \frac{b}{(\gamma-\alpha)^2}=k,\quad \frac{c}{(\alpha-\beta)^2}=l \text{ setzt.}$$

Hierdurch wird der Ausdruck

$$ip^2A+kq^2B+lr^2C,$$

und wenn man noch, wegen $p+q+r=0$, die Verhältnisse $p:q:r=1-y:-1:y$ setzt:

$$\text{I.}\quad i(1-y)^2A+kB+ly^2C.$$

§. 259. Die Summe der Coëfficienten dieses Ausdrucks ist: $(i+l)y^2-2iy+i+k$, und mithin der Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel, oder Hyperbel, nachdem (§. 252.) $(i+l)(i+k)-i^2=kl+li+ik$ positiv, null, oder negativ ist.

Um daher den allgemeinen Ausdruck für eine Parabel zu erhalten, welche die drei F.seiten berührt, setze man

$$kl:li:ik=\frac{1}{i}:\frac{1}{k}:\frac{1}{l}=1-e:-1:e$$

mithin $i:k:l=e:-e(1-e):1-e$,
und der Ausdruck wird

$$e(1-y)^2 A-e(1-e)B+(1-e)y^2 C,$$

wobei die Summe der Coëfficienten $=(e-y)^2$.

§. 260. Die Berührungspunkte des Kegelschnitts I. mit den Seiten des F.dreiecks sind

$$kB+lC,\ lC+iA,\ iA+kB,$$

für $y=1, \infty, 0$. Es folgt hieraus, wie schon in §. 64. bemerkt worden, *dass sich die drei Geraden, von den Spitzen eines um einen Kegelschnitt beschriebenen Dreiecks nach den Berührungspunkten in den gegenüberliegenden Seiten gezogen, in einem Punkte schneiden.* Diesem Punkte kommt hier der Ausdruck

$$iA+kB+lC \text{ zu.}$$

Da durch einen beliebig in der Ebene ABC gegebenen Punkt $D\equiv iA+kB+lC$ jedes der Verhältnisse $i:k:l$, und durch dieselben der Kegelschnitt I. vollkommen bestimmt ist, so folgt auch umgekehrt, *dass, wenn man einen nach Willkühr in der Ebene eines Dreiecks* (*ABC*) *genommenen Punkt* (*D*, Fig. 43.) *mit den Spitzen des Dreiecks durch Gerade verbindet, es immer einen, und nur einen, Kegelschnitt giebt, welcher die Seiten des Dreiecks in ihren Durchschnitten* (A',B',C') *mit jenen Geraden berührt.* Da also jedem Punkte D der Ebene in Bezug auf das Dreieck ABC ein bestimmter Kegelschnitt entspricht, so entsteht die Frage: für welche Punkte der Ebene ist der zugehörige Kegelschnitt

eine Ellipse, für welche eine Parabel, etc.; oder, wie wir uns kurz ausdrücken wollen: welche Punkte der Ebene sind in dieser Beziehung elliptisch, welche parabolisch, welche hyperbolisch?

Die Antwort hierauf ist, zufolge des vor. §., dass ein Punkt $iA+kB+lC$ zu der ersten, zweiten oder dritten Art gehört, nachdem $kl+li+ik$ positiv, null oder negativ ist. Die parabolischen Punkte insonderheit werden daher eine Curve bilden, in deren Ausdrucke zwischen den drei Coëfficienten i, k, l die Relation $kl+li+ik=0$ statt findet. Man setze hiernach

$$kl : li : ik = 1-z : -1 : z,$$

so wird $$i : k : l = z : -z(1-z) : 1-z$$

und der Ausdruck der Curve

$$zA - z(1-z)B + (1-z)C.$$

Die Curve ist daher (§. 252.) eine durch A, B, C gehende Ellipse, die, zufolge dessen, was das nächste Capitel über die Bestimmung des Mittelpunktes eines Kegelschnitts lehren wird, den Punkt $A+B+C$, d. i. den Schwerpunkt des Dreiecks ABC, zum Mittelpunkte hat.

Da endlich nach §. 251., wenn wir die dortigen f, g, h, a, b, c mit $1, 1, 1, i, k, l$ vertauschen, der Punkt $iA+kB+lC$ innerhalb oder ausserhalb des Kegelschnitts $zA-$ etc. liegt, nachdem $kl+li+ik$ positiv oder negativ ist, so sind die innerhalb der Ellipse liegenden Punkte elliptisch, die ausserhalb derselben befindlichen hyperbolisch; und das Ergebniss lässt sich nun folgendergestalt zusammenfassen.

Aufgabe. Ein Punkt in der Ebene eines Dreiecks wird mit den Spitzen des Dreiecks durch Gerade verbunden. Die Art des Kegelschnitts zu bestimmen,

welcher die Seiten des Dreiecks in den Durchschnitten derselben mit jenen Geraden berührt.

Auflösung. Man beschreibe um das Dreieck eine Ellipse, welche den Schwerpunkt desselben zum Mittelpunkt hat; und der Kegelschnitt ist eine Parabel, Ellipse, oder Hyperbel, je nachdem der erstgedachte Punkt in der Peripherie dieser Ellipse, oder innerhalb, oder ausserhalb derselben liegt.

§. 261. Der Ausdruck der Tangente an den Kegelschnitt

$$\text{I.} \quad i(1-y)^2 A + kB + ly^2 C$$

in dem Punkte, für welchen $y = y'$, findet sich nach §. 77.:

$$i(1-y')(1-y'-2v) A + kB + ly'(y'+2v) C,$$

oder, wenn man $y' + 2v = w$ setzt:

$$(1) \quad i(1-y')(1-w) A + kB + ly'wC.$$

Die Durchschnitte dieser Geraden mit den F.linien sind:

$$kB + ly'C, \; ly'C - i(1-y')A, \; i(1-y')A + kB.$$

Sey nun in der Ebene ABC eine beliebige Gerade gezogen, welche die F.linien in den Punkten

$$bB - cC, \; cC - aA, \; aA - bB \quad (\text{§. 39. } a.)$$

schneide, und deren Ausdruck daher

$$(\mathfrak{d}) \quad a(1-v) A - bB + cvC.$$

Es wird die Bedingungsgleichung verlangt, unter welcher diese Gerade eine Tangente an den Kegelschnitt I. ist. —

Soll die Tangente (1) für einen gewissen Werth von y' mit der Geraden $\mathfrak{d}$ identisch werden können, so müssen für denselben Werth von y' auch die Durchschnitte beider mit den F.linien zusammenfallen. Wie sich durch Vergleichung dieser Punkte ergiebt, muss sich daher verhalten:

$$a:b:c = i(1-y'):-k:ly',$$

mithin $\frac{a}{i}:\frac{b}{k}:\frac{c}{l} = 1-y':-1:y'$, und

$$\frac{a}{i}+\frac{b}{k}+\frac{c}{l}=0,$$

welches demnach die gesuchte Bedingungsgleichung ist.

Noch folgt aus diesen Proportionen:

$$i:k:l = \frac{a}{1-y'}:-b:\frac{c}{y'}.$$

Hierdurch wird der Ausdruck I.:

$$\frac{a(1-y)^2}{1-y'}A - bB + \frac{cy^2}{y'}C,$$

der Ausdruck für alle Kegelschnitte, die von den drei F.linien und der vierten Geraden 𝔟 berührt werden. Für den Berührungspunkt mit letzterer ist $y=y'$, und daher dieser Punkt selbst:

$$a(1-y')A - bB + cy'C.$$

Soll noch eine fünfte Gerade

$$(\mathfrak{e})\quad a'(1-w)A - b'B + c'wC$$

den Kegelschnitt I. berühren, so tritt die Bedingungsgleichung

$$\frac{a'}{i}+\frac{b'}{k}+\frac{c'}{l}=0$$

hinzu, aus welcher, in Verbindung mit der vorigen,

$$i:k:l = \frac{1}{bc'-b'c}:\frac{1}{ca'-c'a}:\frac{1}{ab'-a'b}$$

folgt. Der Ausdruck des Kegelschnitts, der von den drei F.linien und den Geraden 𝔟, 𝔢 berührt wird, ist demnach

$$\frac{(1-y)^2}{bc'-b'c}A + \frac{1}{ca'-c'a}B + \frac{y^2}{ab'-a'b}C.$$

Da hierin keine unbestimmte Constante mehr vor-

kömmt, so schliessen wir, *dass an fünf in einer Ebene liegende Gerade immer ein, und nicht mehr als ein, Kegelschnitt beschrieben werden kann, dass folglich ein Kegelschnitt im Allgemeinen durch fünf Tangenten vollkommen bestimmt ist.*

§. 262. Eine Parabel ist schon durch vier Tangenten vollkommen bestimmt. Denn soll die von den drei F.linien berührte Parabel

$$\frac{(1-y)^2}{1-e}A - B + \frac{y^2}{e}C \text{ (§. 259.)}$$

noch von der vierten Geraden $\mathfrak{d}$ berührt werden, so muss zufolge des vorigen §. $a(1-e)-b+ce=0$, mithin $e=-\frac{a-b}{c-a}$ seyn. Hierdurch wird der Ausdruck der Parabel:

$$\frac{(1-y)^2}{b-c}A + \frac{1}{c-a}B + \frac{y^2}{a-b}C.$$

An vier in einer Ebene befindliche Gerade lässt sich daher immer eine, und nur eine, Parabel berührend legen.

Heissen die Berührungspunkte der Parabel mit den drei F.linien: D, E, F (Fig. 58.), so hat man:

$(a-b)B+(c-a)C+(b-c)D=0$, für $y=1$;

$(b-c)C+(a-b)A+(c-a)E=0$, für $y=\infty$;

$(c-a)A+(b-c)B+(a-b)F=0$, für $y=0$.

Hieraus fliessen die Proportionen:

$$CB:BD:DC=EA:AC:CE=AF:FB:BA$$
$$=b-c:c-a:a-b,$$

die sich durch folgenden Satz ausdrücken lassen.

Legt man an eine Parabel zwei Tangenten, AE und *AF, so werden die Theile derselben zwischen ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte A und den Be-*

rührungspunkten E und *F von jeder dritten Tangente CB in umgekehrten Verhältnissen geschnitten* (*AE* in *C*, wie *FA* in *B*).

Diese einfachen Proportionen sind die Quelle mehrerer anderer merkwürdiger Eigenschaften der Parabel. — Es verhält sich (§. 18. *b.*):

$$ABC : ABE = AC : AE = -(c-a) : (b-c),$$
$$ABE : AFE = AB : AF = -(a-b) : (b-c),$$

folgl. $ABC : AFE = (c-a)(a-b) : (b-c)^2$;
folglich, wenn man $(b-c)(c-a)(a-b) = p$ setzt:

$$AEF = -ABC.(b-c)^3 : p, \text{ u. eben so}$$
$$BFD = -ABC.(c-a)^3 : p,$$
$$CDE = -ABC.(a-b)^3 : p.$$

Zieht man aus diesen drei Gleichungen die Kubikwurzeln und addirt sie hierauf, so kommt:

$$1)\quad AEF^{\frac{1}{3}} + BFD^{\frac{1}{3}} + CDE^{\frac{1}{3}} = 0.$$

Das Product aus den drei Gleichungen giebt:

$$2)\quad AEF.BFD.CDE = -ABC^3.$$

Weil endlich $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3 = 3(b-c)(c-a)(a-b) = 3p$ ist, so kommt, wenn man die drei Gleichungen unmittelbar addirt:

$$3)\quad AEF + BFD + CDE = -3ABC,$$

oder $AFE - BFD - CDE = 3ABC$,
und hieraus mit Hinblick auf die Figur, in welcher die Dreiecke der letztern Formel, *AFE*, *BFD*,.., insgesammt einerlei Vorzeichen haben:

$$4)\quad FED = 2ABC \text{ *}).$$

*) Ohne die Betrachtung der Figur nöthig zu haben, kann man zu diesem Resultate aus der Gleichung 3) auch folgendergestalt durch Anwendung der allgemeinen Formeln in §. 18. gelangen.

Aus diesen Gleichungen 1)..4) ziehen wir nun folgende Sätze.

Legt man an eine Parabel drei Tangenten, so ist von den drei Dreiecken, welche von je zweien dieser Tangenten und der durch die Berührungspunkte derselben gezogenen Geraden begrenzt werden, die Kubikwurzel aus dem Dreiecke, welches die zwei äussersten Tangenten zu Seiten hat, der Summe der Kubikwurzeln aus den beiden andern Dreiecken gleich. (Der in §. 174. 2. angewendete Satz.)

Das Product aus diesen drei Kubikwurzeln ist dem von den drei Tangenten eingeschlossenen Dreiecke selbst gleich. (Analog mit §. 174. 3.)

Dieses umschriebene Dreieck ist auch gleich der Hälfte des einbeschriebenen Dreiecks, dessen Spitzen die Berührungspunkte in den Seiten des erstern sind (§. 174. 6.). Eine leichte Folge hiervon ist, dass überhaupt *jedes um eine Parabel beschriebene Vieleck halb so gross ist, als das einbeschriebene Vieleck, welches die Berührungspunkte des umschriebenen zu seinen Spitzen hat.*

Zusatz. Bezeichnen A', B', C' die Punkte, in denen die vierte Gerade $\mathfrak{d}$ von den F.linien geschnitten wird, so ist

Es ist $o = ABC + ACD + ADB$, weil D, B, C
$o = DCA + DAE + DEC$, weil E, C, A
$o = DAB + DBF + DFA$, weil F, A, B
in einer Geraden liegen (§. 18. *b.*); und
$DEF = AEF + AFD + ADE$. (§. 18. *c.* II.).
Addirt man diese vier Gleichungen, so kommt:
$$DEF = ABC + AEF + DBF + DEC,$$
und wenn man diese Summe zur Gleichung 3) addirt:
$DEF = -2ABC$, wie vorhin.

$$(c-a)B' - cC + aA = 0, \quad (a-b)C' - aA + bB = 0,$$

und folglich $\frac{AC}{CB'} : \frac{AB}{BC'} = -\frac{c-a}{a-b} = BD : CD.$

Mittelst dieser Proportion lässt sich, wie man bald wahrnimmt, folgende Aufgabe lösen.

Es sind vier in einer Ebene liegende Gerade gegeben. Die Punkte zu finden, in denen die Geraden von der an sie zu beschreibenden Parabel berührt werden.

§. 263. Betrachten wir jetzt die gegenseitige Lage des Kegelschnitts $i(1-y)^2 A + kB + ly^2 C$,
und der Geraden $a(1-v)A - bB + cvC$
im Allgemeinen. Für die gemeinschaftlichen Punkte beider, wenn es anders deren giebt, muss sich verhalten:

$$i(1-y)^2 : k : ly^2 = a(1-v) : -b : cv.$$

Hieraus folgt nach der oft gebrauchten Schlussart:

$$\frac{i}{a}(1-y)^2 + \frac{k}{b} + \frac{l}{c}y^2 = 0,$$

eine quadratische Gleichung, durch deren Auflösung man die Werthe von y für die Durchschnittspunkte erhält. Die Gerade wird demnach den Kegelschnitt entweder in zwei Punkten schneiden, oder in einem berühren, oder gar nicht treffen, nachdem die Wurzeln dieser Gleichung möglich und verschieden, etc. sind, nachdem also (vergl. §. 259.)

$$\frac{kl}{bc} + \frac{li}{ca} + \frac{ik}{ab} = \frac{ikl}{abc}\left(\frac{a}{i} + \frac{b}{k} + \frac{c}{l}\right)$$

negativ, null (§. 261.), oder positiv ist.

Um diese Bedingungen insbesondere für die gegenseitige Lage der Geraden c und der, an die drei F.linien und b beschriebenen, Parabel zu finden, hat man in der

vorigen Formel a, b, c mit a', b', c' und i, k, l mit $\frac{1}{b-c}$, $\frac{1}{c-a}$, $\frac{1}{a-b}$ zu vertauschen, und man erhält:

$$\frac{a'(b-c)+b'(c-a)+c'(a-b)}{a'b'c'(b-c)(c-a)(a-b)} <, =, > 0, \text{ oder}$$

$$(n) \quad \frac{a'-a+b-b'+ab'-a'b}{a'b'(1-a)(1-b)(a-b)} <, =, > 0,$$

wenn man, weil es immer nur auf das gegenseitige Verhältniss der Coëfficienten ankommt, $c = c' = 1$ setzt. a und b sowohl, als a' und b', sind alsdann nicht bloss, wie vorher, in bestimmten Verhältnissen zu einander stehende Zahlen, sondern bestimmte Zahlen selbst.

§. 264. Da durch fünf Tangenten ein Kegelschnitt vollkommen bestimmt ist, so soll nunmehr eine ähnliche Untersuchung, wie in §. 255., angestellt, und gezeigt werden, wie aus der gegenseitigen Lage fünf gerader Linien in einer Ebene die Art des an sie, als Tangenten, zu beschreibenden Kegelschnitts bestimmt werden kann.

Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen ist der an die drei F.linien und die Geraden 𝔡 und 𝔢 beschriebene Kegelschnitt (§. 261.) eine Ellipse, Parabel, oder Hyperbel, nachdem die Function ($kl+li+ik$, §. 259.)

$$\frac{bc'-b'c+ca'-c'a+ab'-a'b}{(bc'-b'c)(ca'-c'a)(ab'-a'b)} \text{ oder}$$

$$(N) \quad \frac{a'-a+b-b'+ab'-a'b}{(a'-a)(b-b')(ab'-a'b)},$$

wenn man, wie im vor. §., $c = c' = 1$ setzt, positiv, null, oder negativ ist.

Sey nun ABC (Fig. 58.) das F.dreieck, dessen Seiten von der vierten Geraden 𝔡 in den Punkten

$$bB - C \equiv A', \quad C - aA \equiv B', \quad aA - bB \equiv C'$$

geschnitten werden. Sämmtliche vier Gerade nehmen wir fest, und daher a und b unveränderlich an, und beschreiben die diese Geraden berührende Parabel. Die fünfte Gerade e, welche die F.linien in den Punkten

$$b'B—C,\ C—a'A,\ a'A—b'B$$

schneidet, denken wir uns in beliebiger Bewegung, also a' und b' nach Willkühr veränderlich; und unsere Untersuchung wird auf die Bestimmung der Fälle hinauskommen, in denen bei der Bewegung von e die von a' und b' abhängige und mit N bezeichnete Function aus dem Positiven in das Negative, oder umgekehrt, übergeht. Nur wollen wir die Bewegung von e noch durch die Bedingung beschränken, dass diese Gerade keinen zweien der sechs Punkte $A, B, .. B', C'$, in denen sich die vier erstern Geraden schneiden, zugleich begegnet, folglich auch bei der Berührung der Parabel mit keiner dieser Geraden zusammenfällt.

Wird nun zuerst die Gerade e über den Punkt A wegbewegt, so dass folglich ihre Durchschnitte $C—a'A$ und $a'A—b'B$ mit AC und AB, in diesen Linien von der einen auf die andere Seite von A rücken, so geht a' durch das Unendliche aus dem Positiven in das Negative, oder umgekehrt; die Function N aber, welche sich für $a' = \infty$ auf $-\frac{1-b}{a'b(b-b')}$ reducirt, verändert ihr Zeichen durch Null. Auf gleiche Art gehen b' durch ∞ und N durch o in das Entgegengesetzte, wenn e über B fortgeführt wird. Geht die Bewegung über C, so dass die Durchschnitte von e mit AC und BC, $C—a'A$ und $b'B—C$, in diesen Linien gleichzeitig von der einen auf die andere Seite von C rücken, so verändern a' und b' ihre Zeichen durch Null; und N, welches sich für $a' = b'$

$\equiv o$ auf $-\frac{b-a}{ab(ab'-a'b)}$ reducirt, wechselt sein Zeichen durch ∞.

Setzen wir zweitens, dass die Linie e über den Punkt A' bewegt wird, dass folglich ihr Durchschnitt $b'B-C$ mit BC in dieser Linie an $A'\equiv bB-C$ vorbeirückt, so geht b' an b vorüber, d. h. die Differenz $b-b'$ ändert ihr Zeichen durch o, und die Function N, welche $b-b'$ zum Factor des Nenners hat, verwandelt sich durch ∞ in das Entgegengesetzte. Eben so erhellet, dass, wenn e über B' oder C' bewegt wird, die Differenzen $a'-a$ oder $ab'-a'b$ durch o, und mithin N durch ∞, ihre Zeichen ändern.

Wird endlich die Gerade e, wenn sie anfänglich der Parabel nicht begegnete, bis zum Schneiden derselben fortgeführt, oder umgekehrt, so erleidet, zufolge des vor. §., im Momente der Berührung der Zähler von N und mithin N selbst einen Zeichenwechsel durch Null. Es ist nämlich der Zähler der dort mit n bezeichneten Function einerlei mit dem Zähler von N; die veränderlichen Factoren a' und b' im Nenner von n behalten aber bei der Berührung endliche Werthe, indem sonst e mit einer der F.linien zusammenfallen würde, welches gegen die vorhin gemachte Annahme ist.

So oft also bei der Fortbewegung von e einer der sieben Fälle eintritt, dass einer der sechs Punkte A, B, C, A', B', C' von der einen auf die andere Seite von e zu liegen kommt, oder dass e die Parabel zu schneiden anfängt, wenn sie derselben vorher nicht begegnet war, oder umgekehrt, eben so oft verändert die Function N ihr Zeichen; ausser diesen Fällen aber in keinem andern, weil umgekehrt, so lange als e weder einen jener sechs Punkte trifft, noch die Parabel berührt, die Coëfficien-

ten a' und b' endliche Werthe haben, die drei Factoren des Nenners von N eben so wenig, als der Zähler dieser Function, $=0$ werden können, und mithin N selbst eine endliche Grösse bleiben muss.

Da nun bei jedem Zeichenwechsel von N, die fünf Linien, wenn sie vorher eine Ellipse berührten, nachher die Tangenten einer Hyperbel werden, und umgekehrt, so ist nur noch übrig, für eine gewisse Lage der Linie e, in der sie die Parabel nicht berührt und auch durch keinen der sechs Punkte geht, die Art des dadurch bestimmten Kegelschnitts zu erforschen, um somit für jede andere Lage von e auf die Art des zugehörigen Kegelschnitts einen Schluss machen zu können. Zu diesem Ende wollen wir annehmen, dass die Parabel von e nicht getroffen werde, und dass die sechs Punkte mit der Parabel auf einerlei Seite von e liegen. Wenn aber fünf Gerade eine Ellipse berühren, so wird von denselben ein entweder ganz oder doch zum Theil begrenzter Raum gebildet, dergestalt, dass man von jedem Punkte desselben zu jeder der fünf Geraden gelangen kann, ohne dabei eine der vier übrigen schneiden zu müssen. Es lehrt aber die unmittelbare Anschauung, dass ein solcher Raum nicht entsteht, wenn e sich in der eben angenommenen Lage befindet; mithin ist für diese Lage der Kegelschnitt eine Hyperbel. Ist nun irgend eine andere Lage der Linie e gegeben, so bewege man sie aus der vorhin angenommenen bis zu der gegebenen fort, und je nachdem während dieser Bewegung eine gerade oder ungerade Anzahl der obigen sieben Fälle sich ereignet, wird der zugehörige Kegelschnitt entweder ebenfalls eine Hyperbel oder eine Ellipse seyn. Dies liefert uns folgendes Resultat.

Aufgabe. Fünf Gerade in einer Ebene sind gegeben, von denen keine drei sich in einem Punkte

schneiden. Die Art des Kegelschnitts zu bestimmen, welcher sie insgesammt berührt.

Auflösung. Man lege an beliebige vier der gegebenen Geraden die sie berührende Parabel und unterscheide dann folgende drei Fälle:

1) *Wird die fünfte Gerade von dieser Parabel nicht getroffen, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem auf der einen und folglich auch auf der andern Seite der fünften eine ungerade oder gerade Anzahl der sechs Punkte liegt, in welchen sich die vier erstern Geraden schneiden.*

2) *Wenn die fünfte Gerade die Parabel berührt, so ist der Kegelschnitt kein anderer, als diese Parabel selbst.*

3) *Wird die Parabel von der fünften geschnitten, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem auf der einen und also auch auf der andern Seite der fünften eine gerade oder ungerade Anzahl der sechs Durchschnittspunkte der vier erstern Geraden begriffen ist.*

Die Betrachtung der speciellen Fälle, wo ein oder zwei Paare der fünf Geraden Parallellinien sind, übergehe ich, um nicht zu weitläufig zu werden. Der Fall, wo drei Gerade einander parallel laufen, ist demjenigen gleich zu achten, wo drei Gerade sich in einem Punkte schneiden, und bleibt daher ausgeschlossen.

§. 265. Die in §. 260. erwiesene merkwürdige Eigenschaft eines um einen Kegelschnitt beschriebenen Dreiecks veranlasste mich zu untersuchen, ob nicht auch bei der analogen Figur im Raume, einer um eine Fläche der zweiten Ordnung beschriebenen dreiseitigen Pyramide, die vier geraden Linien, welche die Spitzen der Pyramide mit den Berührungspunkten in den gegenüber-

liegenden Seiten verbinden, sich in einem Punkte schneiden. Wiewohl ich nun bald wahrnahm, dass hier eine so einfache Relation nicht statt finden könne, so gelang es mir doch, an der Stelle der vermutheten Eigenschaft eine andere zu entdecken, die mir merkwürdig genug scheint, um sie nebst ihrer Entwickelung diesem Capitel als Anhang noch beizufügen.

Seyen A, B, C, D (Fig. 59.) die Spitzen der umschriebenen Pyramide; E, F, G, H die ihnen resp. gegenüberliegenden Berührungspunkte. — Um zuerst zu zeigen, dass sich die vier Linien AE, BF, ... im Allgemeinen nicht schneiden, so denke man sich die Fläche selbst und die drei in ihr liegenden Punkte E, F, G gegeben. Hiermit sind auch der Punkt D, als der gemeinschaftliche Durchschnitt der in E, F, G an die Fläche berührend gelegten Ebenen, und die Geraden DA, DB, DC, als die Durchschnittslinien dieser Ebenen, gegeben. Von den drei Punkten A, B, C aber können beliebige zwei, z. B. A und B, in den Linien DA und DB nach Willkühr genommen werden, wodurch dann der dritte, C, als der Durchschnitt der durch AB an die Fläche berührend gelegten Ebene mit DC, gefunden wird. Sollten nun für jede Annahme der zwei Punkte A und B in den Linien DA und DB die Geraden AE und BF sich schneiden, sollten also immer die vier Punkte A, B, E, F in einer Ebene liegen, so müssten E und F in der Ebene DAB selbst enthalten seyn, welches gegen die Annahme ist. —

Man stelle sich jetzt einen die Fläche einhüllenden Kegel vor, welcher D zur Spitze hat. Dieser Kegel wird die durch D gehenden und die Fläche in E, F, G berührenden Ebenen DBC, DCA, DAB in den Geraden DE, DF, DG berühren, und die Ebene ABC in einer Curve schneiden, welche von den Geraden BC, CA, AB

in den Punkten *I, K, L* berührt wird, in denen diese Linien resp. von *DE*, *DF*, *DG* geschnitten werden.

Es ist aber bekannt, dass die Linie, in welcher eine Fläche der zweiten Ordnung von einem sie umhüllenden Kegel berührt wird, in einer Ebene liegt und von der zweiten Ordnung ist, dass folglich ein solcher Kegel auch von jeder andern Ebene, wie *ABC*, in einer Linie der zweiten Ordnung geschnitten wird. Mithin müssen sich die drei Geraden *AI*, *BK*, *CL* in einem Punkte *M* treffen (§. 260.).

Hieraus fliesst weiter, dass sich die drei Ebenen *DAI*, *DBK*, *DCL* in der Geraden *DM* schneiden, und dass folglich die drei in diesen Ebenen resp. liegenden Linien *AE*, *BF*, *CG* der Geraden *DM* begegnen; oder, was dasselbe sagt: dass sich durch *D* eine Gerade *DM* ziehen lässt, welche die drei Linien *AE*, *BF*, *CG*, und somit alle vier *AE*, . . *DH* zugleich schneidet. Auf dieselbe Art wird bewiesen, dass man durch *C* eine Gerade *CN*, und durch *B* eine Gerade *BO* (so wie auch durch *A* eine Gerade *AP*) legen kann, welche den vier Geraden *AE*, . . *DH* zugleich begegnet. Nimmt man daher *DM*, *CN*, *BO* zu den drei leitenden Linien eines hyperbolischen Hyperboloids, so sind *AE*, . . *DH* vier verschiedene Lagen der das Hyperboloid erzeugenden Linie; welches (vergl. §. 112. zu Ende) folgenden Satz giebt:

Wird um eine Fläche der zweiten Ordnung eine dreiseitige Pyramide beschrieben, und werden die vier Spitzen der Pyramide mit den in die gegenüberliegenden Seiten fallenden Berührungspunkten durch vier gerade Linien verbunden, so schneidet jede andere Gerade, welche dreien dieser vier Linien begegnet, auch die vierte.

Drittes Capitel.

Von den Durchmessern und dem Mittelpunkte eines Kegelschnitts und den Asymptoten der Hyperbel.

§. 266. Der allgemeine Ausdruck eines Kegelschnitts, welcher durch die drei F.punkte geht, ist (§. 249.):

$$fxA - gx(1-x)B + h(1-x)C.$$

Seyen P und Q zwei Punkte desselben, für erstern $x=p$, für letztern $x=q$, so hat man:

$$p'P = fpA - gp(1-p)B + h(1-p)C,$$
$$q'Q = fqA - gq(1-q)B + h(1-q)C.$$

Hieraus folgt nach Elimination von A:

$$p'qP - pq'Q = gpq(p-q)B - h(p-q)C$$

$\equiv$ dem Durchschnitte der Geraden PQ und BC.

Wir wollen nun annehmen, dass die Sehne des Kegelschnitts, PQ, mit der F.linie BC parallel, und mithin ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt unendlich entfernt sey. Hierzu wird erfordert:

$$p'q - pq' = gpq(p-q) - h(p-q) = 0.$$

Da aber der Factor $p-q$ dieser Gleichung nur dann $=0$ ist, wenn P und Q zusammenfallen, so wird schon

$$gpq - h = 0$$

die zum Parallelismus von PQ und BC nöthige Bedingungsgleichung seyn.

Man addire jetzt die Gleichungen für P und Q, nachdem man sie vorher resp. mit q und p multiplicirt hat, und es kommt: $p'qP+pq'Q=$

$$2fpqA-gpq(2-p-q)B+h(p+q-2pq)C.$$

Unter derselben Voraussetzung nun, dass PQ parallel mit BC, und daher $p'q-pq'=0$ ist, wird $p'qP+pq'Q \equiv P+Q \equiv$ dem Mittelpunkte der Sehne PQ, und wenn wenn wir diesen mit M bezeichnen, für pq den aus der Bedingungsgleichung entspringenden Werth $h:g$ substituiren und grösserer Einfachheit willen $p+q=2h:z$ setzen:

$$M \equiv fzA+g(h-z)B+h(g-z)C.$$

§. 267. Folgerungen. 1) In dem eben gefundenen Ausdrucke für den Mittelpunkt einer mit BC parallelen Sehne ist von einer Sehne zur andern bloss z veränderlich. Es gehört folglich dieser Ausdruck mit der Veränderlichen z der Linie an, in welcher die Mittelpunkte aller mit BC parallelen Sehnen enthalten sind. Diese Linie ist folglich eine Gerade; und weil man jede Sehne zur F.linie BC nehmen kann, so ist zu schliessen:

Die Mittelpunkte dreier oder mehrerer mit einander paralleler Sehnen eines Kegelschnitts liegen in einer geraden Linie.

Man nennt eine solche Gerade einen Durchmesser des Kegelschnitts.

2) Weil f, g, h gleichartig aus den Constanten $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ des symmetrischen Ausdrucks in §. 64. 1. zusammengesetzt sind (§. 249.), so erhält man aus dem Ausdrucke des, die Sehne BC (für $z=0$) und die mit ihr parallelen Sehnen halbirenden, Durchmessers

$$(\alpha) \quad fzA+g(h-z)B+h(g-z)C$$

den Ausdruck des Durchmessers, welcher die mit CA

parallelen Sehnen halbirt, wenn man in (a) die Buchstaben A in B, B in C, C in A, f in g, g in h, h in f verwandelt. Es ist daher dieser Durchmesser

$$(b)\quad f(h-w)A+gwB+h(f-w)C;$$

und durch dieselbe Verwandlung ergiebt sich hieraus der Durchmesser (c), in welchem die Mittelpunkte von AB und der damit parallelen Sehnen liegen.

Nun ist der Durchschnitt von (a) mit AC, $\equiv$

$$fA+(g-h)C, \text{ für } z=h;$$

und der Durchschnitt von (b) mit BC, $\equiv$

$$gB+(f-h)C, \text{ für } w=h.$$

Wird daher A in dem Umfange des Kegelschnitts so bestimmt, dass AC mit (a) parallel läuft, so ist ersterer Durchschnitt ein unendlich entfernter Punkt, und mithin $f+g-h=0$; folglich auch letzterer Durchschnitt unendlich entfernt, d. i. BC parallel mit (b); also:

Wenn von zwei Durchmessern eines Kegelschnitts der eine (a) *parallel ist mit den Sehnen* (AC), *welche der andere* (b) *halbirt, so ist auch der andere parallel mit den Sehnen* (BC), *durch deren Mittelpunkte der erstere geht.*

Zwei Durchmesser, die in einer solchen Beziehung zu einander stehen, heissen **zusammengehörige** Durchmesser. Noch folgt hieraus, dass, wenn von zwei zusammengehörigen Durchmessern der eine zugleich eine Sehne ist, er von dem andern halbirt wird.

3) Für die Punkte, in denen der Durchmesser (a) die Curve schneidet, verhält sich:

$$z:h-z:g-z=x:-x(1-x):1-x,$$

mithin $$z:h=x:x^2 \text{ und } z:g=x:1,$$

woraus $z=\pm\sqrt{gh}$ und $x=\pm\sqrt{\frac{h}{g}}$ folgt. Der Durch-

messer (a) schneidet daher die Curve entweder in zwei Punkten, oder in keinem, je nachdem g und h einerlei oder verschiedene Vorzeichen haben.

Für die Ellipse ist $(g+h-f)^2 - 4gh$ negativ (§. 252.), und daher $4gh$ immer positiv; folglich, weil je zwei Punkte der Ellipse die Stelle von B und C vertreten können:

Die Ellipse wird von jedem ihrer Durchmesser in zwei Punkten geschnitten.

Für die Punkte, in denen der Durchmesser (b) dem Kegelschnitte begegnet, findet sich eben so $x = \pm\sqrt{\frac{f}{h}}$. Setzen wir nun, wie in 2), $f+g-h=0$, und sind daher (a) und (b) zwei zusammengehörige Durchmesser, so reducirt sich die Formel $(g+h-f)^2 - 4gh = (f+g-h)^2 - 4fg$ auf $-4fg$. Bei der Hyperbel, wo diese Formel immer positiv ist, müssen folglich alsdann f und g verschiedene Vorzeichen haben, woraus sich mit Betrachtung der Werthe von x für (a) und (b) weiter ergiebt, dass, wenn (a) die Hyperbel schneidet, (b) ihr gar nicht begegnet, und umgekehrt; also:

Von zwei zusammengehörigen Durchmessern der Hyperbel trifft der eine die Hyperbel in zwei Punkten, der andere in keinem.

4) Setzt man in dem Ausdrucke von M oder (a), $z = \frac{1}{2}(g+h-f)$, so wird er:

$$M \equiv f(g+h-f)A + g(h+f-g)B + h(f+g-h)C.$$

Da sich dieser Ausdruck bei der in 2) angedeuteten Verwandlung der Buchstaben nicht ändert, so ist der damit ausgedrückte Punkt nicht allein in dem Durchmesser (a), sondern auch in den beiden andern (b) und (c) begriffen; woraus wir schliessen: Je drei Durchmesser und folglich

Alle Durchmesser eines Kegelschnitts schneiden sich in einem Punkte. Dieser Punkt heisst der **Mittelpunkt** des Kegelschnitts.

Alle Durchmesser, welche zugleich Sehnen sind, haben daher den Mittelpunkt des Kegelschnitts zu ihrem eigenen Mittelpunkte.

5) Die Summe der Coëfficienten in dem Ausdrucke für den Mittelpunkt ist: $-f^2-g^2-h^2+2gh+2hf+2fg$.

Da diese Summe bei der Parabel $=0$ ist (§. 252.), so folgt: *Alle Durchmesser einer Parabel sind einander parallel.*

§. 268. **Zusätze.** *a.* Der Ausdruck eines in das F.dreieck ABC beschriebenen Kegelschnitts ist (§. 258.):

$$i(1-y)^2A+kB+ly^2C.$$

Um für diesen Kegelschnitt den Ausdruck seines Mittelpunkts zu finden, nehme man die Berührungspunkte (§. 260.):

$$kB+lC=fA',\ lC+iA=gB',\ iA+kB=hC',\ \text{(Fig. 60.)},$$
$$\text{(wo daher } f=k+l,\ g=l+i,\ h=i+k\text{)}$$

zu F.punkten, substituire also im vorigen Ausdrucke für iA, kB, lC resp. $\frac{1}{2}(gB'+hC'-fA')$, $\frac{1}{2}(hC'+fA'-gB')$, $\frac{1}{2}(fA'+gB'-hC')$, und man erhält nach gehöriger Reduction:

$$fyA'-gy(1-y)B'+h(1-y)C'.$$

Für den solchergestalt ausgedrückten Kegelschnitt ist aber der Mittelpunkt:

$$M\equiv f(g+h-f)A'+g(h+f-g)B'+h(f+g-h)C',$$

Wird nun hierin statt fA', gB', hC' wiederum $kB+lC$, etc., und statt $g+h-f, \ldots$ resp. $2i, \ldots$ gesetzt, so kommt:

$$M\equiv i(k+l)A+k(l+i)B+l(i+k)C,$$

als Ausdruck für den Mittelpunkt des in das Dreieck ABC beschriebenen Kegelschnitts.

b. Aus den Ausdrücken für A', B', C' folgt:

$$gB' = fA' + hC' - 2kB.$$

Eliminirt man hiermit B' aus dem Ausdrucke des um $A'B'C'$ beschriebenen Kegelschnitts und aus dem Ausdrucke für den Mittelpunkt desselben, so ergiebt sich:

$$fy^2 A' + 2ky(1-y)B + h(1-y)^2 C',$$

und $$M \equiv 2fhA' - 4k^2 B + 2fhC',$$

oder einfacher, wenn man $\frac{1-y}{y} = \nu$ und $\frac{fh}{4k^2} = \alpha$ setzt (§. 61. V.):

$$\alpha A' + \nu B + \nu^2 C' \text{ und } M \equiv 2\alpha A' - B + 2\alpha C',$$

der allgemeine Ausdruck eines Kegelschnitts, welcher in A' und C' von $A'B$ und $C'B$ berührt wird, und der Ausdruck für den Mittelpunkt desselben.

c. Nennt man N den Mittelpunkt von $A'C'$, so wird $M \equiv 4\alpha N - B$; also:

Werden an einen Kegelschnitt zwei Tangenten gezogen, so liegen der Durchschnitt dieser Tangenten und der Mittelpunkt der Sehne, welche die Berührungspunkte verbindet, mit dem Mittelpunkte des Kegelschnitts in einer geraden Linie.

Wird daher in ein Dreieck ABC ein zweites $A'B'C'$ so beschrieben, dass die Geraden durch die gegenüberliegenden Spitzen, AA',.., sich in einem Punkte schneiden, so treffen sich auch die Geraden, welche die Mittelpunkte der Seiten $B'C'$,.. des einbeschriebenen Dreiecks mit den Spitzen A,.. des umschriebenen verbinden, in einem Punkte, in dem Mittelpunkte des Kegelschnitts, welcher die Seiten des umschriebenen Dreiecks in den Spitzen des einbeschriebenen berührt.

d. Die Durchschnitte der Geraden BNM mit dem Kegelschnitte sind:

$$\alpha A' + \sqrt{\alpha B} + \alpha C' \equiv 2\sqrt{\alpha N} + B, \text{ für } v = +\sqrt{\alpha};$$
$$\alpha A' - \sqrt{\alpha B} + \alpha C' \equiv 2\sqrt{\alpha N} - B, \text{ für } v = -\sqrt{\alpha}.$$

Heisse der eine Durchschnitt K, der andere L, so folgt aus diesen Ausdrücken in Verbindung mit $M \equiv 4\alpha N - B$:

$$BM : NM = BK^2 : NK^2 = BL^2 : NL^2 \; (= 4\alpha : 1.)$$

§. 269. *In das Dreieck ABC* (Fig. 61.) *ist das Dreieck A'B'C', in dieses das Dreieck A''B''C'', in dieses das Dreieck A'''B'''C''', u. s. w. einbeschrieben, dergestalt, dass jede der drei Reihen gleichnamiger Spitzen, A, A', ...; B, B', ...; C, C', ... in einer Geraden liegt, und diese drei Geraden sich in einem Punkte D schneiden. Alsdann lässt sich in das Dreieck ABC ein Kegelschnitt beschreiben, der die Seiten desselben in den Punkten A', B', C' berührt; in das Dreieck A'B'C' ein Kegelschnitt, dessen Berührungspunkte A'', B'', C'' sind; in A''B''C'' ein Kegelschnitt, dessen Berührungspunkte A''', B''', C'''; und so fort ohne Ende. Ich behaupte nun, dass die Mittelpunkte aller dieser Kegelschnitte in einer durch D gehenden Geraden liegen.*

Beweis. Man setze erstlich zur Abkürzung:

$$k + l = i',\quad l + i = k',\quad i + k = l',$$
$$k' + l' = i'',\quad l' + i' = k'',\quad i' + k' = l'',$$
$$k'' + l'' = i''',\quad l'' + i'' = k''',\quad i'' + k'' = l''',$$

u. s. w.

Sey nun $dD = iA + kB + lC$, wo $d = i + k + l$,
so ist $i'A' = kB + lC$, $k'B' = lC + iA$, $l'C' = iA + kB$,
folglich $i'A' + k'B' + l'C' \equiv iA + kB + lC \equiv D$,
folglich, weil $A'D \cdot B'C' \equiv A''$, etc.
$i''A'' = k'B' + l'C'$, $k''B'' = l'C' + i'A'$, $l''C'' = i'A' + k'B'$.

Es ist aber der Mittelpunkt M des Kegelschnitts,

welcher das Dreieck ABC in den Punkten $A' \equiv kB + lC, \ldots$ berührt (§. 268. *a.*):

$$mM = i(k+l)A + \ldots = ii'A + kk'B + ll'C,$$

wo $m = ii' + kk' + ll'$; und eben so der Mittelpunkt M' des folgenden Kegelschnitts, welcher das Dreieck $A'B'C'$ in den Punkten $A'' \equiv k'B' + l'C', \ldots$ berührt:

$$\begin{aligned} m'M' &= i'(k'+l')A' + \ldots = i'i''A' + k'k''B' + l'l''C' \\ &= i''(kB + lC) + k''(lC + iA) + l''(iA + kB) \\ &= i(k'' + l'')A + \ldots = ii'''A + kk'''B + ll'''C, \end{aligned}$$

wo $m' = i'i'' + \ldots = ii''' + \ldots$ *). Aus diesen Ausdrücken für M und M' folgt nun weiter:

$$m'M' - mM = i(i''' - i')A + k(k''' - k')B + l(l''' - l')C,$$

und, weil $i''' - i' = k'' + l'' - i' = i' + k' + l' = 2(i + k + l) = 2d$, und eben so $k''' - k' = l''' - l' = 2d$ ist **),

$$m'M' - mM = 2d(iA + kB + lC) = 2d^2D.$$

*) Auf gleiche Art ist $ii'''' + kk'''' + ll'''' = i'i''' + k'k''' + l'l''' = i''^2 + k''^2 + l''^2$, und allgemein:

$$ii^{(p)} + kk^{(p)} + ll^{(p)} = i^{(q)}i^{(p-q)} + \ldots,$$

wo p und q positive ganze Zahlen bezeichnen, und $p > q$ ist.

**) Auch diese Relationen lassen sich noch allgemeiner darstellen. Denn erstlich ist:

$$i^{(p)} + k^{(p)} + l^{(p)} = 2^p(i + k + l).$$

Ferner hat man:

$$k - i = i' - k' = k'' - i'' = i''' - k''' = \text{etc.}$$

und $i^{(p)} - i^{(q)} = k^{(p)} - k^{(q)} = l^{(p)} - l^{(q)} = \frac{1}{3}(2^p - 2^q)(i + k + l)$, wenn $p - q$ eine positive gerade Zahl ist.

Sind endlich t, u, v, w positive ganze Zahlen, und $t + u - v - w$ eine positive gerade Zahl, so findet sich:

$$\begin{aligned} &(i^{(t)}i^{(u)} + k^{(t)}k^{(u)} + l^{(t)}l^{(u)}) - (i^{(v)}i^{(w)} + \ldots) \\ &= \tfrac{1}{3}(2^{t+u} - 2^{v+w})(i + k + l)^2. \end{aligned}$$

Es liegen demnach M und M', und eben so die Mittelpunkte je zweier anderer auf einander folgender Kegelschnitte, folglich die ganze Reihe von Mittelpunkten, in einer durch D gehenden Geraden.

Um noch das Gesetz ausfindig zu machen, nach welchem die Mittelpunkte in dieser Geraden vertheilt sind, so hat man

$$m'M' - mM = 2d^2D = 2(i+k+l)^2D$$

und eben so $m''M'' - m'M' = 2(i'+k'+l')^2 D = 8d^2D$;
folglich $M \equiv m'M' - 2d^2D$, und $M'' \equiv m'M' + 8d^2D$,
folglich (§. 237.) $(M', D, M, M'') = -\frac{1}{4}$, und eben so

$$(M'', D, M', M''') = -\frac{1}{4}, \text{ u. s. w.,}$$

woraus man, wenn D, M und M' gegeben sind, die folgenden Mittelpunkte $M'', M''', \ldots$ finden kann.

Noch fliesst aus diesen D.verhältnissen (§. 184.):

$$(M', M'', D, M) = 5, \quad (M', M'', M''', D) = \frac{5}{4},$$

folglich (§. 185.): $(M', M'', M''', M) = \frac{25}{4}$,

folglich $(M, M', M'', M''') = \frac{25}{21}$, und eben so

$$(M', M'', M''', M'''') = \frac{25}{21}, \text{ u. s. w.;}$$

wodurch das Gesetz der Mittelpunkte nach Art der recurrirenden Reihen bestimmt ist.

§. 270. Der allgemeine Ausdruck eines Kegelschnitts, welcher von den F.linien AB und CB in den F.punkten A und C berührt wird, ist (§. 61. V.):

$$\alpha A + vB + v^2C,$$

und der Ausdruck für eine Tangente an denselben in dem Punkte, für welchen $v = v'$ ist, (§. 77.):

$$\alpha A + (v' + x) B + (v'^2 + 2v'x) C,$$

oder, wenn wir $v' + 2x = y$ setzen:

$$2\alpha A + (v' + y) B + 2v'yC.$$

Eben so hat eine zweite Tangente, für deren Berührungspunkt $v = v''$ ist, den Ausdruck:

$$2\alpha A + (v'' + z) B + 2v''zC.$$

Seyen nun v' und v'' die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$v^2 + v + \alpha = 0,$$

also der Kegelschnitt eine Hyperbel (§. 252.), die zwei Berührungspunkte unendlich entfernt (§. 89.), und die zwei Tangenten die Asymptoten der Hyperbel. Es folgt aber aus der quadratischen Gleichung, wenn man zuvor, weil $\alpha < \frac{1}{4}$ seyn muss, $\alpha = \frac{1}{4}(1 - m^2)$ setzt:

$$v' = -\tfrac{1}{2}(1 - m), \quad v'' = -\tfrac{1}{2}(1 + m).$$

Substituirt man diese Werthe in den Ausdrücken der Tangenten, so kommt:

$$(1 - m^2) A + (2y - 1 + m) B - 2(1 - m) yC,$$
$$(1 - m^2) A + (2z - 1 - m) B - 2(1 + m) zC,$$

oder einfacher, wenn man $2y = (1 - m)t$ und $2z = (1 + m)u$ setzt:

$$(1 + m) A - (1 - t) B - (1 - m) tC,$$
$$(1 - m) A - (1 - u) B - (1 + m) uC.$$

Dies sind demnach die Ausdrücke für die beiden Asymptoten der Hyperbel, die zum Ausdrucke

$$\tfrac{1}{4}(1 - m^2) A + vB + v^2 C$$

hat. Wir wollen hieraus einige der vorzüglichern Eigenschaften dieser Linien zu entwickeln suchen.

§. 271. Zuerst findet sich für den gegenseitigen Durchschnitt der Asymptoten, $t = -\frac{1+m}{1-m}$, $u = -\frac{1-m}{1+m}$, also der Durchschnitt selbst:

$$(1-m^2)A-2B+(1-m^2)C,$$

welches der Mittelpunkt der Hyperbel ist (§. 268. *b.*); also:

Die zwei Asymptoten einer Hyperbel schneiden sich in dem Mittelpunkte der letztern.

Heissen ferner die Durchschnitte der einen und andern Asymptote mit den F.linien BC, CA, AB resp. D, E, F; D', E', F' (Fig. 62.), so hat man:

$$mD = B-(1-m)C, \qquad -mD' = B-(1+m)C,$$
$$-2mE = (1-m)C-(1+m)A, \qquad 2mE' = (1+m)C-(1-m)A,$$
$$mF = (1+m)A-B, \qquad -mF' = (1-m)A-B.$$

Durch Verbindung dieser sechs Gleichungen ergiebt sich nun:

1) $D+D'=2C$ und $F+F'=2A$,

d. h. C ist der Mittelpunkt von DD', und eben so A von FF'; also:

Legt man an eine Hyperbel eine Tangente, so wird das zwischen die Asymptoten fallende Stück derselben in dem Berührungspunkte halbirt.

2) $E+E'=C+A$,

d. h. EE' und CA haben denselben Mittelpunkt; also:

Von einer die Hyperbel schneidenden Geraden haben der zwischen die Hyperbel, und der zwischen die Asymptoten fallende Theil einerlei Mittelpunkt.

3) $D+F=2E$ und $D'+F'=2E'$,

d. h. E ist der Mittelpunkt von DF, und E' von $D'F'$; mithin:

Werden an eine Hyperbel zwei Tangenten gezogen, so werden die von denselben in der einen und der andern Asymptote abgeschnittenen Theile durch die Gerade, welche die Berührungspunkte verbindet, halbirt.

4) $m(D-F')=(1-m)(A-C)$ u. $m(F-D')=(1+m)(A-C)$, d. h. DF' und FD' sind mit AC parallel, oder:

Die Geraden, welche die Punkte verbinden, in denen zwei an eine Hyperbel gelegte Tangenten die Asymptoten schneiden, sind unter sich und mit der Sehne durch die Berührungspunkte parallel.

Viertes Capitel.

Gegenseitiges Entsprechen zwischen Punkten und geraden Linien in Bezug auf einen Kegelschnitt.

§. 272. Die im vorigen Capitel bemerkten Eigenschaften paralleler Sehnen eines Kegelschnitts können durch Betrachtung einer damit collinear verwandten Figur noch sehr verallgemeinert werden.

Seyen A, B, C, D und A', B', C', D' zwei Systeme von vier Punkten, deren jedes in einer Ebene enthalten ist, und bei deren jedem keine drei Punkte in einer Geraden liegen. Man setze diese Punkte der Reihe nach einander entsprechend, A' dem A, B' dem B, u. s. w.; so kann man nach dem Gesetze der Collineationsverwandtschaft für jeden fünften Punkt des einen Systems den entsprechenden fünften des andern finden (§. 219.).

Werde nun durch erstere vier Punkte ein Kegelschnitt beschrieben. Diesem wird eine durch letztere vier Punkte gehende Curve entsprechen, welche gleichfalls ein Kegelschnitt ist (§. 220. c), also jedem Punkte des einen Kegelschnitts ein Punkt des andern, so wie auch

der Tangente in dem erstern Punkte die Tangente in dem letztern.

In dem durch $A, .. D$ beschriebenen Kegelschnitte seyen E und F (Fig. 63.) noch zwei andere Punkte, so genommen, dass sich die drei Sehnen AB, CD, EF in einem Punkte Z schneiden; so wird auch, wenn E', F' die den E, F entsprechenden Punkte in dem andern Kegelschnitte sind, die Sehne $E'F'$ durch den dem Z entsprechenden Punkt $Z' \equiv A'B' \cdot C'D'$ gehen. Weil ferner die anfänglichen zwei Systeme von vier Punkten, $A, .. D$ und $A', .. D'$, von einander ganz unabhängig genommen werden können, so wollen wir setzen, $A'B'$ und $C'D'$ seyen mit einander parallel, also Z' ein unendlich entfernter Punkt, folglich auch $E'F'$ mit diesen Sehnen parallel. Bezeichnen wir alsdann die Mittelpunkte von $A'B'$, $C'D'$, $E'F'$ resp. mit M', N', O', so liegen diese Punkte, nach §. 267., in einer durch den Mittelpunkt des Kegelschnitts gehenden Geraden, welche z' heisse; und es werden, wenn M, N, O die entsprechenden Punkte in den Linien AB, CD, EF der ersten Figur sind, auch diese Punkte in einer Geraden z liegen. Aber noch mehr: wegen der Gleichheit der D.verhältnisse zwischen sich entsprechenden Punkten in collinear verwandten Figuren (§. 221. 2.), muss seyn:

$$(A, B, Z, M) = (A', B', Z', M').$$

Da nun Z' unendlich entfernt ist, so sind $A'Z'$ und $B'Z'$ als gleich zu betrachten, und daher $A'Z' = -Z'B'$; folglich, weil auch $A'M' = M'B'$ ist, $(A', B', Z', M') = -1$; also auch $(A, B, Z, M) = -1$, und eben so $(C, D, Z, N) = -1$, $(E, F, Z, O) = -1$; welches uns folgenden Satz giebt:

1) *Hat man ein System dreier oder mehrerer Sehnen eines Kegelschnitts, welche sich in einem und demselben Punkte Z schneiden, und bestimmt man in jeder dieser Sehnen einen noch andern Punkt so, dass die Sehne durch ihn und durch den Punkt Z harmonisch getheilt wird, so liegen alle diese andern Punkte* ($M, N, O, ..$) *in einer geraden Linie z.*

Man ziehe an den zweiten Kegelschnitt in A' und B' Tangenten, so liegt ihr gegenseitiger Durchschnitt mit dem Mittelpunkte M' von $A'B'$ und mit dem Mittelpunkte des Kegelschnitts in einer Geraden (§. 268. *c.*), d. i. in der Geraden z'; folglich, wenn wir dieses auf den ersten Kegelschnitt anwenden:

2) *In der Linie z sind die Durchschnitte je zweier Tangenten begriffen, welche an die Endpunkte derselben Sehne gelegt werden* (an A und B, an C und D, etc.).

Man setze $AC \cdot BD \equiv V$ und $AD \cdot BC \equiv W$, so ist nach §. 198. 3. $(A, B, Z, VW) = (C, D, Z, VW) = -1$. Die Gerade VW ist folglich einerlei mit z; d. h.

3) *Die Linie z enthält auch die Durchschnitte je zweier Geraden, womit die Endpunkte je zweier Sehnen verbunden werden.*

Weil endlich $(A, B, Z, z) = -1$, und daher, wenn Z ausserhalb A und B liegt, der Durchschnitt von z mit AB zwischen A und B fallen muss, also auch dann noch dazwischen fallen muss, wenn A und B einander unendlich nahe liegen, d. h. wenn ZAB zur Tangente wird, so schliessen wir:

4) *Liegt der gemeinschaftliche Durchschnitt der Sehnen, Z, ausserhalb des Kegelschnitts, und zieht man an letztern von Z aus zwei Tangenten, so fallen die Berührungspunkte ebenfalls in die Linie z, sind folg-*

lich einerlei mit den Punkten, in denen diese Linie die Curve schneidet.

§. 273. Nimmt man umgekehrt in der Geraden z ausserhalb des Kegelschnitts einen beliebigen Punkt U und zieht von demselben zwei Tangenten UG und UH an erstern, wo G und H die Berührungspunkte sind, so liegen G und H mit Z in einer Geraden. Denn wäre dieses nicht, so schneide ZG die Curve noch einmal in $H_{,}$, und es müsste der Durchschnitt der Tangenten an G und an $H_{,}$ ein Punkt von z seyn; folglich, weil die Tangente an G die z in U schneidet, so müsste auch die Tangente an $H_{,}$ durch U gehen; folglich müssten von U drei Tangenten UG, UH, $UH_{,}$ an den Kegelschnitt gezogen werden können, welches nicht möglich ist; also:

Hat man in einer Ebene einen Kegelschnitt und eine Gerade z, und zieht man von drei oder mehrern Punkten der Geraden, welche ausserhalb der Curve liegen, Tangentenpaare an dieselbe, so werden sich alle die Geraden, welche die Berührungspunkte je eines Paares verbinden, in einem und demselben Punkte Z schneiden.

So wie also in Bezug auf einen Kegelschnitt jedem Punkte Z in dessen Ebene eine Gerade z entspricht, eben so entspricht auch umgekehrt jeder Geraden z ein Punkt Z, rücksichtlich dessen die Gerade die vorhin erörterten Eigenschaften besitzt.

§. 274. Sey wie vorhin AB eine der durch Z gehenden Sehnen und M der Durchschnitt dieser Sehne mit z, so ist $(A, B, Z, M) = -1$. Es folgt hieraus, dass von den zwei Punkten Z und M der eine innerhalb, der andere ausserhalb AB fällt, dass mithin nachdem Z ausserhalb oder innerhalb des Kegelschnitts liegt, z denselben schneidet, oder ihm nicht begegnet. — Liegt der

Punkt Z ausserhalb des Kegelschnitts, und rückt er alsdann bis an die Curve selbst fort, so gehen die zwei durch Z zu legenden Tangenten und die, die Berührungspunkte verbindende, Gerade z (§. 272. 4.) in eine zusammen, so dass, wenn Z in den Umfang des Kegelschnitts fällt, z eine Tangente in diesem Punkte wird. Für ein unendlich entferntes Z endlich werden die Sehnen einander parallel und z ein Durchmesser des Kegelschnitts; welches der zum Grunde gelegte Normalfall ist.

§. 275. Soll für einen gegebenen Punkt Z die entsprechende Gerade z gefunden werden, so geschieht dies, wenn Z ausserhalb des Kegelschnitts liegt, am einfachsten dadurch, dass man von Z an den Kegelschnitt zwei Tangenten ZS, ZT (Fig. 64.) legt, wo dann die Gerade ST, welche die Berührungspunkte verbindet, die gesuchte z seyn wird.

Allgemein anwendbar ist nach §. 272. 2. folgendes Verfahren, mag der gegebene Punkt Y innerhalb oder ausserhalb des Kegelschnitts liegen. Man ziehe durch Y zwei die Curve schneidende Gerade ST und UV, und an die Endpunkte dieser Sehnen Tangenten, welche sich resp. in Z und W schneiden; so ist ZW die verlangte, dem Y entsprechende Gerade y. — Zugleich folgt hieraus, dass, wenn Z ausserhalb liegt, jedem Punkte Y der Geraden z eine durch Z gehende Gerade y entspricht.

Liege Y, wie in der Figur, zwischen S und T, also innerhalb des Kegelschnitts, und sey X ein beliebiger dritter Punkt in der alsdann ausserhalb fallenden Geraden ZW oder y, so wird nach §. 273. die Gerade, gelegt durch die Berührungspunkte der von X an den Kegelschnitt gezogenen Tangenten, durch Y gehen. Da nun diese Gerade die dem Punkte X entsprechende Linie ist (§. 272. 4.), so schliessen wir, dass auch bei einem

innerhalb liegenden Punkte Y und der dann ausserhalb fallenden ihm entsprechenden Geraden y, jedem Punkte X der letztern eine durch den erstern gehende Gerade entspricht.

Weil endlich dem Punkte S des Kegelschnitts selbst die daran gezogene Tangente SZ (vor. §.), und dem Punkte Z derselben die durch S gehende Gerade ST entspricht, so können wir allgemein folgenden Satz aufstellen.

1) Entspricht dem Punkte X die Gerade x, so entspricht auch umgekehrt jedem Punkte von x eine durch X gehende Gerade.

Wir folgern hieraus leicht weiter:

2) Sind X, Y zwei Punkte und x, y die ihnen entsprechenden Geraden, so entspricht dem Durchschnittspunkte von x, y die durch X und Y gezogene Gerade.

Denn einem Punkte in x entspricht eine Gerade durch X, und einem Punkte in y eine Gerade durch Y, folglich dem gemeinschaftlichen Punkte von x und y, die Gerade, welche durch X und Y zugleich geht.

Ist Z ein dritter Punkt der Geraden XY, so muss die ihm entsprechende Gerade z durch den der Geraden XY entsprechenden Punkt $x \cdot y$ gehen. Und umgekehrt, wird durch den Punkt $x \cdot y$ eine dritte Gerade z gezogen, so muss Z in XY liegen, indem sonst dem gemeinschaftlichen Durchschnitte von x, y, z drei verschiedene Gerade YZ, ZX, XY entsprechen würden. Also:

3) Liegen drei oder mehrere Punkte in einer Geraden, so schneiden sich die ihnen entsprechenden Geraden in einem Punkte, und umgekehrt.

Man bemerke dabei noch, dass, wenn die Gerade, in welcher die Punkte X, Y, Z liegen, unendlich ent-

fernt angenommen wird, die in einem Punkte zusammentreffenden Geraden x, y, z Durchmesser des Kegelschnitts werden, und dass man somit auf den Satz zurückkommt, dass alle Durchmesser sich in einem Punkte schneiden.

§. 276. Wie man bald wahrnimmt, lassen sich die eben erhaltenen Sätze sehr vortheilhaft dazu anwenden, um aus gewissen schon gefundenen Eigenschaften der Kegelschnitte neue, analoge Eigenschaften abzuleiten. So wie nämlich jedem Punkte in der Ebene einer solchen Curve eine Gerade entspricht, und umgekehrt, eben so giebt es für jede zur dritten Classe (§. 248.) gehörige Eigenschaft der Kegelschnitte, wonach gewisse Gerade sich in einem Punkte schneiden, oder gewisse Punkte in einer Geraden liegen, eine entsprechende, mit Hülfe jener Sätze zu findende Eigenschaft, wo Punkte mit Geraden und das Liegen in einer Geraden mit dem Zusammentreffen in einem Punkte gegenseitig vertauscht sind.

Um dieses vorläufig durch ein Paar einfache Beispiele zu erläutern, wollen wir zuerst das um einen Kegelschnitt beschriebene und denselben in A', B', C' berührende Dreieck ABC (Fig. 60.) in Betrachtung ziehen. Hier entsprechen den Punkten A', B', C' die Geraden BC, CA, AB; folglich den Punkten A, B, C die Geraden $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$; folglich den Geraden AA', BB', CC' die Punkte $BC \cdot B'C'$, $CA \cdot C'A'$, $AB \cdot A'B'$. Da nun jene drei Geraden sich in einem Punkte schneiden (§. 260.), so müssen diese drei Punkte in einer Geraden liegen; wie dies auch schon aus §. 198. 4. folgt.

Ein anderes Beispiel ist folgendes. Sind A, B, C, D vier Punkte eines Kegelschnitts, und bezeichnet man der Kürze willen die an A gelegte Tangente mit tA, etc. so

liegen die Punkte $tA \cdot tB$ und $tC \cdot tD$ mit $AC \cdot BD$ in einer Geraden (§. 272. 2. 3.); folglich auch, wenn man B und D gegenseitig vertauscht: $tA \cdot tD$ und $tB \cdot tC$ mit $AC \cdot BD$ in einer Geraden. Dies giebt mit Hinblick auf Fig. 65., wo $tA \cdot tB \equiv E$, $tB \cdot tC \equiv F$, $tC \cdot tD \equiv G$, $tD \cdot tA \equiv H$, $AC \cdot BD \equiv N$ ist, den bekannten Satz:

Beschreibt man in einen Kegelschnitt ein Viereck (ABCD) und ein anderes (EFGH) um denselben, dessen Berührungspunkte die Spitzen des erstern sind, so schneiden sich die vier Diagonalen beider Vierecke in einem Punkte (N).

Um nun für diesen Satz den analogen aufzufinden, so entspricht der Geraden AC der Punkt $tA \cdot tC \equiv I$, der Geraden BD der Punkt $tB \cdot tD \equiv K$, den Punkten E und G die Geraden AB und CD, folglich der Geraden EG der Punkt $AB \cdot CD \equiv L$, und eben so der Geraden FH der Punkt $AD \cdot BC \equiv M$. Da nun die vier Geraden AC, BD, EG, FH sich in einem Punkte schneiden, so müssen die vier Punkte I, K, L, M in einer Geraden liegen; d. h.

Bei zwei auf eben die Weise in und um einen Kegelschnitt beschriebenen Vierecken liegen die vier Durchschnittspunkte der gegenüberstehenden Seiten in gerader Linie.

Noch kann bei dieser Figur bemerkt werden, dass die Gerade ENG auch durch den Punkt M geht, indem die vier Punkte E, G, N, M in der dem Punkte L entsprechenden Geraden liegen. Auf gleiche Art sind auch F, H, N, L in einer Geraden, in der dem Punkte M entsprechenden, enthalten. Nach §. 198. 3. ist nun $(A, B, L, NM) = -1$; mithin wird von den vier Geraden NA, NB, NL, NM, d. i. von AC, BD, FH, EG die Gerade ABL, und folglich auch jede andere Gerade (§. 189.)

harmonisch geschnitten. Da endlich EA, EB, ENM die Gerade IL in I, K, M schneiden, so ist auch $(I, K, L, M) = -1$; also:

Von den vier Diagonalen beider Vierecke wird jede andere Gerade harmonisch geschnitten; und eben so bilden auch die vier in einer Geraden liegenden Durchschnittspunkte der gegenüberstehenden Seiten eine harmonische Theilung.

Eigenschaften in und um einen Kegelschnitt beschriebener Sechsecke.

§. 277. Der allgemeine Ausdruck eines Kegelschnitts, welcher jede der drei F.seiten in zwei Punkten schneidet, ist nach §. 63. 1.:

$$\alpha(v-a)(v-a')A+\beta(v-b)(v-b')B+..$$

oder, wenn wir nur Vl.verhältnisse entwickeln wollen und uns daher des abgekürzten Calculs bedienen, nach welchem die Coëfficienten α, β, γ mit den Buchstaben A, B, C vereinigt werden können:

$$(v-a)(v-a')A+(v-b)(v-b')B+(v-c)(v-c')C.$$

Heissen die Durchschnitte der Curve mit BC, CA, AB, resp. M, P; N, Q; O, R, (Fig. 66.), so hat man:

$$M=(a-b)(a-b')B+(a-c)(a-c')C, \text{ für } v=a$$
$$N=(b-c)(b-c')C+(b-a)(b-a')A, \quad . \quad . \quad b$$
$$O=(c-a)(c-a')A+(c-b)(c-b')B, \quad . \quad . \quad c$$
$$P=(a'-b)(a'-b')B+(a'-c)(a'-c')C, \quad . \quad . \quad a'$$
$$Q=(b'-c)(b'-c')C+(b'-a)(b'-a')A, \quad . \quad . \quad b'$$
$$R=(c'-a)(c'-a')A+(c'-b)(c'-b')B, \quad . \quad . \quad c'$$

Hieraus fliessen die Dreieckschnittsverhältnisse:

$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AO}{OB}=-\frac{a-c'}{a-b'}\cdot\frac{b-a'}{b-c'}\cdot\frac{c-b'}{c-a'},$$

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=-\frac{a'-c}{a'-b}\cdot\frac{b'-a}{b'-c}\cdot\frac{c'-b}{c'-a};$$

folglich ist I. $\frac{BM.BP}{MC.PC}\cdot\frac{CN.CQ}{NA.QA}\cdot\frac{AO.AR}{OB.RB}=1,$

d. h.

Hat man ein Dreieck ABC und einen, jede Seite desselben oder ihre Verlängerung schneidenden, Kegelschnitt, so ist das Product aus den sechs Verhältnissen, nach welchen die Seiten des Dreiecks BC, CA, AB, jede zweimal, von dem Kegelschnitte getheilt werden, der Einheit gleich.

§. 278. Wird umgekehrt aus sechs Punkten $M,\ldots R$ in einer Ebene ein Dreieck ABC construirt, indem man $NQ\cdot OR\equiv A$, $OR\cdot MP\equiv B$, $MP\cdot NQ\equiv C$ setzt, und findet alsdann zwischen den Segmenten der Dreiecksseiten die Gleichung I. statt, so liegen die sechs Punkte in einem Kegelschnitte. — Denn durch fünf Punkte ist ein Kegelschnitt vollkommen bestimmt. Träfe nun der durch M, N, O, P, Q bestimmte Kegelschnitt die Gerade AB nächst O nicht noch in R, sondern in einem andern Punkte R', so müsste die vorige Gleichung I. noch bestehen, wenn man darin R' für R substituirte; es müsste folglich sich verhalten $AR:RB=AR':R'B$, welches nicht möglich ist.

Nun haben wir in §. 243. 2) gesehen, dass dieselbe Gleichung I. auch bei zwei Dreiecken ABC und $A'B'C'$ (Fig. 52.) statt hatte, bei denen die Geraden durch die gleichnamigen Spitzen sich in einem Punkte schnitten, folglich die Durchschnitte der gleichnamigen Seiten in einer Geraden lagen, und wo $M,N\ldots R$, eben so wie hier in den Seiten des Dreiecks ABC vertheilt, die Durchschnitte der ungleichnamigen Seiten waren. Dies giebt

uns, in Verbindung mit dem eben umgekehrten Satze des vorigen §., folgendes Theorem:

Wenn zwei Dreiecke in einer Ebene, ABC und A'B'C', eine solche Lage gegen einander haben, dass die drei Geraden durch die gleichnamigen Spitzen, AA', BB', CC', in einem Punkte sich schneiden, so liegen die drei Durchschnitte der gleichnamigen Seiten, BC·B'C', CA·C'A', AB·A'B' in einer Geraden, und die sechs Durchschnitte der ungleichnamigen Seiten, BC·C'A', BC·A'B', CA·A'B', etc. in einem Kegelschnitte.

§. 279. Der aus §. 243. angezogene Satz kann auf doppelte Weise umgekehrt werden.

a. Liegen die Punkte *BC·B'C'*, *CA·C'A'*, *AB·A'B'* in einer Geraden, so schneiden sich umgekehrt die Geraden *AA'*, *BB'*, *CC'* in einem Punkte, und es besteht folglich zwischen den Segmenten der Seiten des Dreiecks *ABC* die Gleichung I. — Denn ginge *CC'* nicht durch den Punkt *AA'·BB'*, so schneide die durch *C* und diesen Punkt geführte Gerade die *B'C'* in *C''*, und es müssten zufolge des directen Satzes, und weil *B'C''* in *B'C'* fällt, die Punkte *BC·B'C'*, *CA·C''A'*, *AB·A'B'* in einer Geraden liegen; in der Geraden durch *BC·B'C'* und *AB·A'B'* müsste folglich nächst *CA·C'A'* noch *CA·C''A'* enthalten seyn; folglich müssten sich die drei Linien *CA*, *C'A'*, *C''A'* in einem und demselben Punkte dieser Geraden schneiden, welches nicht seyn kann, da die letztern zwei sich schon in *A'* begegnen.

b. Besteht zwischen den Segmenten der Seiten des Dreiecks *ABC* die Gleichung I., so werden die Durchschnitte der gleichnamigen Seiten beider Dreiecke in einer Geraden liegen, und folglich nach *a.* die Geraden durch die gleichnamigen Spitzen sich in einem Punkte

schneiden. — Denn läge in der Geraden durch die Punkte $BC \cdot B'C'$ und $AB \cdot A'B'$ nicht auch der Punkt $CA \cdot C'A'$, so werde diese Gerade von CA in X, und AB von MX in R' geschnitten. Alsdann müsste nach *a.* die Gleichung I. noch bestehen, wenn darin R' für R substituirt würde, welches aber, wie schon in §. 278. gezeigt worden, nicht möglich ist.

Aus dieser doppelten Umkehrung des Satzes in §. 243. und der Umkehrung des Satzes in §. 277. fliesst nun leicht, dass von den vier Bedingungen:

1) die drei Geraden durch die gleichnamigen Spitzen schneiden sich in einem Punkte;

2) die drei Punkte, in denen sich die gleichnamigen Seiten schneiden, liegen in einer Geraden;

3) die sechs Durchschnitte der ungleichnamigen Seiten liegen in einem Kegelschnitte;

4) die Gleichung I.;

eine jede zur Voraussetzung gemacht, und die jedesmal drei übrigen zu Folgen genommen werden können. Dies giebt, mit Uebergehung der vierten Bedingung, drei verschiedene Sätze, von denen der eine schon in §. 278. aufgestellt worden. Die beiden andern, wo 3) als Folge von 2) und umgekehrt genommen wird, sollen den Inhalt des nächsten §. ausmachen.

§. 280. 1) *Wenn von zwei Dreiecken ABC und $A'B'C'$ in einer Ebene die drei Durchschnitte der gleichnamigen Seiten in einer Geraden liegen,* so *kann durch die sechs Durchschnitte der ungleichnamigen Seiten ein Kegelschnitt beschrieben werden.* Oder:

Wenn bei einem Sechsecke ($MPNQOR$) die drei Durchschnitte der drei Paare gegenüberstehender Seiten, ($MP \cdot QO$, $PN \cdot OR$, $NQ \cdot RM$) in einer Geraden

liegen, so sind die Spitzen des Sechsecks in einem Kegelschnitte enthalten.

Mittelst dieses Satzes lässt sich sehr leicht die Aufgabe lösen: *Zu fünf gegebenen Punkten einer Ebene, M, P, N, Q, O, noch andere Punkte der Ebene zu finden, welche in dem durch die gegebenen fünf zu beschreibenden Kegelschnitte liegen.* — Man ziehe durch O eine beliebige Gerade OB, suche $OB \cdot NP \equiv X$, $MP \cdot OQ \equiv Y$, $XY \cdot QN \equiv Z$, und es ist $ZM \cdot OB \equiv R$ ein sechster Punkt des Kegelschnitts.

2) *Bei einem in einen Kegelschnitt beschriebenen Sechsecke liegen die drei Punkte, in denen sich je zwei gegenüberstehende Seiten desselben schneiden, in einer geraden Linie.*

Der Entdecker dieses sehr merkwürdigen Satzes ist Robert Simson. Siehe dessen *Sect. con.* V. 47.

§. 281. Zusätze. *a.* Aus dem letztern Satze können auch die im Vorigen entwickelten Eigenschaften eines in einen Kegelschnitt beschriebenen Vierecks sehr leicht abgeleitet werden. Lässt man nämlich die zwei Endpunkte einer Seite RM des einbeschriebenen Sechsecks, in dem Kegelschnitte bis zum Zusammenfallen sich einander nähern, so wird die Seite selbst $=0$, ihre Verlängerung aber zu einer Tangente des Kegelschnitts. Setzt man nun, dass eben so Q mit N zusammenfalle, so verwandelt sich das Sechseck in das einbeschriebene Viereck $MPNO$, und die drei Punkte, welche in einer Geraden liegen sollen, werden mit Anwendung der in §. 276. gebrauchten Bezeichnung für die Tangenten: $MP \cdot NO$, $PN \cdot OM$, $tN \cdot tM$; übereinstimmend mit Fig. 63. und 65., wenn man die dortigen A, B, C, D mit M, N, O, P vertauscht.

b. Die hierbei verschwindend angenommenen Seiten des Sechsecks sind zwei einander gegenüberstehende. Lässt man aber zwei solche Seiten in Null übergehen, die nur eine zwischen sich haben, z. B. *QO* und *RM*, so erhält man das Viereck *MPNO* mit den drei in einer Geraden liegenden Punkten: *MP*·t*O*, *PN*·*OM*, *NO*·t*M*. Siehe Fig. 67. Dies lässt sich folgendergestalt durch Worte ausdrücken:

Der Schneidepunkt der Diagonalen eines in einen Kegelschnitt beschriebenen Vierecks MNOP, liegt in gerader Linie mit den zwei Punkten, in welchen die Tangenten an die Endpunkte einer Diagonale MO zwei gegenüberstehende Seiten MP, NO schneiden.

c. Wendet man diese Construction auf beide Paare gegenüberstehender Seiten und auf beide Diagonalen an, so erhält man den achteckigen Stern in Fig. 68., welcher sich folgendergestalt beschreiben lässt.

ABCD ist ein Viereck in einem Kegelschnitte, EFGH ein anderes um denselben, dessen Berührungspunkte die Spitzen des erstern sind. Alsdann bilden die Durchschnitte der Seiten des einen mit den Seiten des andern Vierecks die Spitzen eines Achtecks MNOPQRST, dessen Seiten MN, NO, OP,... abwechselnd in die Seiten des einen und des andern Vierecks fallen, und welches nachstehende Eigenschaften besitzt:

1) *Die vier Diagonalen beider Vierecke, AC, BD, EG, FH, schneiden sich in einem Punkte* (§. 276.).

2) *In demselben Punkte treffen auch die vier Diagonalen durch die gegenüberstehenden Spitzen des Achtecks, MQ, NR, OS, PT, zusammen.* (Vorherg. Satz.)

3) *Durch alle acht Spitzen des Achtecks lässt sich ein Kegelschnitt beschreiben.*

Dieses Letztere kann so bewiesen werden. — Von dem Sechsecke $MNOPQR$ schneiden sich die gegenüberstehenden Seiten MN und PQ in D, NO und QR in C. Auch liegen nach dem vorigen Abschnitte dieses §. die drei Punkte

$$AB\cdot CD,\quad tA\cdot BC,\quad tB\cdot AD$$

$$\text{d. i.}\quad OP\cdot CD,\quad R\quad,\quad M$$

und folglich $OP\cdot RM$, D, C, d. i. der Durchschnitt des dritten Paares gegenüberstehender Seiten mit den Durchschnitten des ersten und zweiten Paares in einer Geraden. Es sind folglich die sechs auf einander folgenden Spitzen des Achtecks, $M, N, \ldots R$, in einem Kegelschnitte enthalten. Eben so werden auch die sechs auf einander folgenden Spitzen N, O, P, Q, R, S in einem Kegelschnitte liegen. Da nun diese letztern sechs Punkte mit den sechs erstern die fünf Punkte N, O, P, Q, R gemein haben, durch fünf Punkte aber nur Ein Kegelschnitt bestimmt wird, so müssen alle sieben Punkte $M, N \ldots S$ in einem Kegelschnitte liegen, und aus gleichem Grunde auch die sieben Punkte $N, O, \ldots T$, und zwar in demselben wie die vorigen; mithin liegen alle acht Punkte $M, N \ldots T$ in einem und demselben Kegelschnitte.

§. 282. Wir wollen jetzt von dem Satze, dass die drei Durchschnitte der gegenüberliegenden Seiten eines in einen Kegelschnitt beschriebenen Sechsecks in gerader Linie liegen, den analogen aufsuchen. — Sey $ABCDEF$ (Fig. 69.) ein in einen Kegelschnitt beschriebenes Sechseck. Man lege an die Spitzen desselben, A, B, C, etc. die Berührenden MG, GH, HI, etc.: so entsprechen sich AB und $tA\cdot tB \equiv G$, BC und $tB\cdot tC \equiv H$, CD und I, etc.;

folglich $AB \cdot DE$ und GK, $BC \cdot EF$ und HL, $CD \cdot FA$ und IM. Da nun nach obigem Satze die drei Punkte $AB \cdot DE$, $BC \cdot EF$, $CD \cdot FA$ in einer Geraden liegen, so müssen sich die drei Geraden GK, HL, IM in einem Punkte schneiden (§. 275. 3.); also:

Beschreibt man um einen Kegelschnitt ein Sechseck, so schneiden sich die drei Diagonalen, welche die gegenüberliegenden Spitzen verbinden, in einem Punkte.

Dieser ebenfalls sehr merkwürdige, von Brianchon entdeckte Satz gilt auch umgekehrt, so dass, *wenn bei einem Sechsecke GHIKLM die drei Diagonalen durch die gegenüberliegenden Spitzen, GK, HL, IM, sich in einem Punkte schneiden, in dasselbe ein Kegelschnitt beschrieben werden kann.* Denn berührte der an die fünf Seiten GH, HI, IK, KL, LM beschriebene Kegelschnitt (§. 261.) nicht auch die sechste MG, so würde eine von G an denselben gelegte Tangente die Seite LM in einem von M verschiedenen Punkte M' schneiden. Mithin müsste, nach dem directen Satze, nächst IM auch IM' durch den Schneidepunkt von GK und HL gehen, welches nicht möglich ist.

Hieraus fliesst zugleich eine leichte Methode, um, *wenn fünf Gerade GH, HI, IK, KL, LM gegeben sind, für den durch sie als Tangenten bestimmten Kegelschnitt so viel, als man will, noch andere Tangenten zu finden.* — Man nehme in LM einen beliebigen Punkt M, und suche, weil H, I, K, L, als die Durchschnitte der ersten und zweiten, ... vierten und fünften Tangente, gegeben sind, die Punkte $HL \cdot IM \equiv X$, $KX \cdot GH \equiv G$, so ist MG die verlangte sechste Tangente.

§. 283. Noch ein Paar andere Sätze mögen ihrer Eleganz wegen hier eine Stelle finden.

Seyen ABC, DEF (Fig. 70.) zwei um einen Kegelschnitt beschriebene Dreiecke. Man setze $AB \cdot DF \equiv G$, $AC \cdot DE \equiv H$, so ist $BGFEHC$ ein um den Kegelschnitt beschriebenes Sechseck. Mithin schneiden sich die drei Geraden BE, GH, FC in einem Punkte, oder wenn wir $BE \cdot FC \equiv I$ setzen: die drei Punkte G, H, I liegen in einer Geraden. Es sind aber diese drei Punkte dieselben, in denen sich die gegenüberstehenden Seiten des Sechsecks $ABEDFC$ schneiden. Mithin kann durch die Spitzen dieses Sechsecks (§. 280.), d. i. durch die Spitzen der beiden Dreiecke ABC und DEF ein Kegelschnitt beschrieben werden; also:

Die sechs Spitzen zweier um einen Kegelschnitt beschriebenen Dreiecke liegen wiederum in einem Kegelschnitte.

Um für diesen Satz noch den entsprechenden zu entwickeln, so heissen die Berührungspunkte in den Seiten der beiden Dreiecke ABC, DEF (Fig. 71.) nach den, den Seiten gegenüberstehenden, Spitzen: A', B', C', D', E', F'. Alsdann entsprechen sich A und $B'C'$, F und $D'E'$, folglich AF und $B'C' \cdot D'E' \equiv M$; auf gleiche Weise CD und $A'B' \cdot E'F' \equiv P$, folglich $AF \cdot CD$ und MP; eben so $BF \cdot CE$ und NQ; $BD \cdot AE$ und OR. Da nun die drei Punkte $AF \cdot CD$, $BF \cdot CE$, $BD \cdot AE$ in einer Geraden liegen, weil, wie vorhin erwiesen, die sechs Punkte A, $B, \ldots F$ in einem Kegelschnitte begriffen sind, so müssen sich die drei Geraden MP, NQ, OR in einem Punkte schneiden. Mithin kann in das Sechseck $MNOPQR$, d. h. in die beiden Dreiecke $A'B'C'$ und $D'E'F'$, deren Spitzen in einem Kegelschnitte liegen, wiederum ein Kegelschnitt beschrieben werden.

Die sechs Seiten zweier in einen Kegelschnitt beschriebenen Dreiecke sind die Tangenten eines zweiten Kegelschnitts.

Hier ist also der dem vorigen entsprechende Satz zugleich der umgekehrte desselben.

§. 284. Seyen A, B, C, D, E, F sechs Punkte in der Ebene eines Kegelschnitts, a, b, c, d, e, f die diesen Punkten in Bezug auf den Kegelschnitt entsprechenden Geraden: so entsprechen sich auch AB und $a \cdot b$, BC und $b \cdot c$, etc.; folglich auch

$$AB \cdot DE \equiv I \text{ und } a \cdot b \overline{} d \cdot e \equiv i,$$

d. i. der Punkt I und die durch die Punkte $a \cdot b$ und $d \cdot e$ geführte Gerade i, und eben so

$$BC \cdot EF \equiv K \text{ und } b \cdot c \overline{} e \cdot f \equiv k,$$

$$CD \cdot FA \equiv L \text{ und } c \cdot d \overline{} f \cdot a \equiv l.$$

Liegen folglich die Punkte I, K, L in einer Geraden, so schneiden sich die Geraden i, k, l in einem Punkte (§. 275. 3.); d. h. nach §. 280. und §. 282.:

Liegen sechs Punkte A, B, C, D, E, F in einem Kegelschnitte, so giebt es einen zweiten Kegelschnitt, der von den sechs ihnen entsprechenden Geraden berührt wird.

Es versteht sich übrigens von selbst, dass jeder dieser beiden Kegelschnitte von dem zuerst gedachten verschieden ist, rücksichtlich dessen die Punkte und Geraden sich gegenseitig entsprechend heissen. Auch sieht man leicht, dass dieser Satz nicht allein umgekehrt werden, sondern auch nach einer, der in §. 281. c. angewendeten, ähnlichen Schlussart auf jede grössere Anzahl von Punkten und Geraden ausgedehnt werden kann, so dass allgemein, wenn sechs oder mehrere Punkte in einem Kegelschnitte liegen, die ihnen entsprechenden Ge-

raden einen zweiten Kegelschnitt berühren, und umgekehrt. Es ist dieser Satz als ein Nachtrag zu den Sätzen 1), 2), 3) in §. 275. anzusehen. Nimmt man an, dass jeder der sechs oder mehrern Punkte ausserhalb des ursprünglichen Kegelschnitts liegt, so kann der Satz (vgl. §. 275. zu Anfang) allgemein verständlich so ausgesprochen werden:

Hat man einen Kegelschnitt und ausserhalb desselben sechs oder mehrere Punkte, welche in einem zweiten Kegelschnitte liegen, zieht man hierauf von jedem dieser Punkte an den ersten Kegelschnitt zwei Tangenten und verbindet die zwei Berührungspunkte jedes Tangentenpaars durch eine Gerade, so giebt es einen dritten Kegelschnitt, der von allen diesen letztern Geraden berührt wird. Oder:

Bewegen sich zwei Tangenten eines Kegelschnitts so, dass ihr Durchschnittspunkt in einem zweiten Kegelschnitte fortgeht, so bewegt sich die, die zwei Berührungspunkte verbindende, Gerade als Tangente eines dritten Kegelschnitts.

Umgekehrt: Legt man an einen Kegelschnitt sechs oder mehrere Tangenten, zieht sodann an einen zweiten Kegelschnitt, der von diesen Tangenten geschnitten wird, durch die Schneidepunkte neue Tangenten, so liegen die Durchschnitte, je zweier dieser letztern Tangenten, welche durch eine und dieselbe der erstern bestimmt werden, ebenfalls in einem Kegelschnitte. Oder:

Bewegen sich zwei Tangenten eines Kegelschnitts so, dass die Gerade durch die zwei Berührungspunkte als Tangente eines zweiten Kegelschnitts fortgeht, so beschreibt der Durchschnitt jener zwei Tangenten einen dritten Kegelschnitt.

Endlich ist noch zu bemerken, dass, so wie die den Punkten eines Kegelschnitts entsprechenden Geraden einen zweiten Kegelschnitt berühren, auch die den Punkten des zweiten entsprechenden Geraden Tangenten des ersten sind. Denn seyen A und B zwei Punkte des ersten, A' und B' zwei Punkte des zweiten, so genommen, dass $\mathrm{t}A'$ dem A und $\mathrm{t}B'$ dem B entspricht. Es entsprechen sich daher auch AB und $\mathrm{t}A' \cdot \mathrm{t}B'$. Sind nun A und B einander unendlich nahe Punkte, so sind es auch A' und B'; alsdann aber wird AB verlängert zur Tangente, und der Punkt $\mathrm{t}A' \cdot \mathrm{t}B'$ fällt mit A' oder B' selbst zusammen. Wenn daher von zwei solchen Kegelschnitten dem Punkte A des einen, die an den andern durch den Punkt A' desselben gelegte Tangente entspricht, so entspricht auch umgekehrt dem Punkte A' des andern die an den ersten durch A gelegte Tangente.

Um sich dieses noch anschaulicher zu machen, betrachte man Fig. 72., wo durch den Kreis der Kegelschnitt vorgestellt ist, rücksichtlich dessen die Punkte und Geraden der Ebene sich gegenseitig entsprechen sollen, und wo die bei A und A' gezeichneten Bögen zwei Kegelschnitte andeuten, die in der eben gedachten Beziehung zu einander stehen. Von dem Punkte A des einen sind an den Kreis zwei Tangenten gelegt. Die, die Berührungspunkte derselben verbindende und daher dem A entsprechende, Gerade QS berührt den andern Kegelschnitt in A'. Die von A' an den Kreis gelegten Tangenten haben in R und T ihre Berührungspunkte, und die daher dem A' entsprechende Gerade RT muss umgekehrt eine Tangente des erstern Kegelschnitts in A seyn. — Dies giebt uns schlüsslich noch den Satz:

Wenn von einem um einen Kegelschnitt beschriebenen Vierecke MNOP der Durchschnittspunkt A der

einen Paars gegenüberstehender Seiten MN, OP in einem Kegelschnitte liegt, und die Gerade TR durch die in dem andern Seitenpaare MP, NO gelegenen Berührungspunkte, Tangente dieses zweiten Kegelschnitts am gedachten Durchschnittspunkte A ist, so liegt auch der Durchschnitt A′ des andern Seitenpaars in einem Kegelschnitte, und die Gerade QS durch die Berührungspunkte des ersten Seitenpaars ist Tangente dieses dritten Kegelschnitts am letztern Durchschnitte A′.

Fünftes Capitel.

Allgemeinere Darstellung des gegenseitigen Entsprechens zwischen Punkten und geraden Linien.

§. 285. Im vorigen Capitel wurde gezeigt, wie in Bezug auf einen Kegelschnitt einem jeden Punkte in dessen Ebene eine gerade Linie und umgekehrt entsprach, und wie nach den Gesetzen dieses gegenseitigen Entsprechens aus einer grossen Anzahl von Eigenschaften der Kegelschnitte andere, analoge Eigenschaften derselben abgeleitet werden konnten. Diese Ableitung analoger Sätze ist aber nicht allein auf Eigenschaften der Kegelschnitte anwendbar. Auch bei bloss geradlinigen Figuren kann für jede Eigenschaft der dritten Classe, wonach gewisse Punkte in einer Geraden liegen, oder gewisse Gerade sich in einem Punkte schneiden, eine analoge Eigenschaft aufgestellt werden, wo Punkte mit Geraden gegenseitig vertauscht sind.

Hat man z. B. drei sich in F (Fig. 73.) schneidende Gerade, und werden diese von zwei andern Geraden resp. in A, B, E und C, D, G geschnitten, so liegt der Durchschnitt H der beiden letztern mit den Durchschnitten I und K der Diagonalen der beiden Vierecke $ABDC$ und $BEGD$ in gerader Linie; und dieses aus dem einfachen Grunde, weil die Linie BD in F und in dem Durchschnitte mit HI sowohl als mit HK harmonisch getheilt wird.

Diese Figur kann also construirt werden, indem man in einer Geraden drei beliebige Punkte A, B, E nimmt, und ausserhalb dieser Geraden nach Willkühr noch zwei andere Punkte C, D. Die übrigen Punkte sind alsdann:

$$F \equiv AC \cdot BD, \quad G \equiv CD \cdot EF,$$

$$H \equiv AB \cdot CD, \quad I \equiv AD \cdot BC, \quad K \equiv BG \cdot DE,$$

von denen die drei letztern in einer Geraden liegen.

Nimmt man nun auf analoge Weise drei sich in einem Punkte schneidende Gerade a, b, e und noch irgend zwei andere Gerade c, d, und bestimmt hieraus die Geraden:

$$f \equiv ac \overline{\ } bd, \quad g \equiv cd \overline{\ } ef,$$

$$h \equiv ab \overline{\ } cd, \quad i \equiv ad \overline{\ } bc, \quad k \equiv bg \overline{\ } de,$$

d. h. die Gerade f, geführt durch die Durchschnitte von a mit c und von b mit d, u. s. w., so müssen sich h, i, k in einem Punkte schneiden.

Um dieses einzusehen, beschreibe man in der Ebene der letztern Figur irgend einen Kegelschnitt und suche in Bezug auf denselben die den Geraden a, b, ... k der Figur entsprechenden Punkte, und man wird somit ein System von Punkten A', B', ... K' erhalten, welches hinsichtlich der Vertheilung der Punkte in gerade Linien von derselben Beschaffenheit ist, wie es das anfängliche

war, und wo erwiesenermassen die drei Punkte H, I, K in einer Geraden lagen. Folglich müssen es auch H', I', K', und daher h, i, k in einem Punkte zusammenkommen.

Man sieht nun leicht, wie diese Beweisführung auch bei jeder andern geradlinigen Figur anwendbar ist, und dass man daher folgendes allgemeine Theorem aufstellen kann:

Aus jedem Satze, nach welchem bei einem Systeme willkührlich genommener Punkte und gerader Linien in einer Ebene durch fortgesetzte Verbindung der Punkte und der Durchschnitte der Linien andere Punkte und Linien gefunden werden, von denen gewisse drei der erstern in einer Linie liegen, oder gewisse drei der letztern sich in einem Punkte schneiden, lässt sich ein anderer Satz ableiten, indem man Punkte mit Linien und das Liegen in einer Linie mit dem Zusammentreffen in einem Punkte gegenseitig verwechselt.

§. 286. Dieses merkwürdige, aus den Eigenschaften der Kegelschnitte gewonnene, jetzt aber ohne alle Beziehung auf diese Curven hingestellte Resultat muss sich nun, so wie es bloss die gegenseitige Lage von Punkten und Geraden betrifft, auch bloss aus der Theorie der geraden Linie ableiten lassen. — Wir schlagen hierzu folgenden analytischen Weg ein.

Der Ausdruck für eine gerade Linie, welche die F.-linien in den Punkten $\gamma B - \beta C$, $\alpha C - \gamma A$, $\beta A - \alpha B$ (§. 39. *a.*) schneidet, also der allgemeine Ausdruck einer Geraden in einer Ebene, lässt sich unter der Form darstellen:

$$\frac{1-\nu}{\alpha}A-\frac{1}{\beta}B+\frac{\nu}{\gamma}C,$$

die sich für $\nu=1, \infty, 0$ auf jene drei Punkte reducirt. — Man habe nun in der Ebene ABC einen Punkt

$$X\equiv\varphi\alpha A+\chi\beta B+\psi\gamma C,$$

und eine durch denselben gelegte Gerade

$$(x)\quad \frac{1-\nu}{p}\alpha A-\frac{1}{q}\beta B+\frac{\nu}{r}\gamma C,$$

wo $\frac{p}{\alpha}$, $\frac{q}{\beta}$, $\frac{r}{\gamma}$ statt der vorigen α, β, γ gesetzt sind. Hierzu ist nöthig, dass:

$$\varphi:\chi:\psi=\frac{1-\nu}{p}:-\frac{1}{q}:\frac{\nu}{r},$$

folglich $\quad p\varphi:q\chi:r\psi=1-\nu:-1:\nu,$

und daher $\quad p\varphi+q\chi+r\psi=0.$

Diese Bedingung, unter welcher X in x liegt, ist also nicht von A, B, C und α, β, γ, sondern nur von p, q, r und φ, χ, ψ, und zwar von den drei erstern Coëfficienten eben so, wie von den drei letztern, abhängig. Dieselbe Bedingungsgleichung wird daher auch statt finden müssen, wenn in einer zweiten Ebene $A'B'C'$ die Gerade

$(x')\quad \frac{1-\nu}{\varphi}\alpha'A'-\frac{1}{\chi}\beta'B'+\frac{\nu}{\psi}\gamma'C'$ durch den Punkt

$X'\equiv p\alpha'A'+q\beta'B'+r\gamma'C'$ gehen soll.

Man setze demnach die Punkte und die Geraden beider Ebenen wechselseitig in eine solche Beziehung, dass jedem Punkte der Ebene ABC

$X\equiv\varphi\alpha A+\ldots$ die Gerade $(x')\quad \frac{1-\nu}{\varphi}\alpha'A'+\ldots$

in der Ebene $A'B'C'$, und umgekehrt jedem Punkte der letztern Ebene

$X' \equiv p\alpha' A' + ..$ die Gerade (x) $\frac{1-p}{p}\alpha A + ..$

in der erstern entspricht. Alsdann wird immer, wenn man in der einen Ebene willkührlich einen Punkt X nimmt und durch diesen eine beliebige Gerade x zieht, in der andern Ebene die dem Punkte X entsprechende Gerade x' durch den der Geraden x entsprechenden Punkt X' gehen. Hieraus ist, eben so wie in §. 275., weiter zu folgern, dass, wenn X, Y zwei Punkte in der einen und x', y' die ihnen entsprechenden Geraden in der andern Ebene sind, dem Durchschnitte $x' \cdot y'$ der letztern die Gerade XY durch die beiden erstern entspricht, und dass, wenn drei oder mehrere Punkte $X, Y, Z, \ldots$ der einen Ebene in einer Geraden liegen, die ihnen entsprechenden Geraden $x', y', z', \ldots$ in der andern Ebene sich in einem Punkte schneiden müssen, und umgekehrt.

Mittelst dieser Beziehungen ergiebt sich nun die Richtigkeit des obigen Theorems von selbst. Construirt man nämlich in der einen Ebene die Figur des zu beweisenden analogen Satzes und sucht für die Punkte und die Geraden dieser Figur die entsprechenden Geraden und Punkte in der andern Ebene, so wird man die Figur des ursprünglichen Satzes erhalten und somit rückwärts aus den schon bewiesenen Eigenschaften dieser letztern Figur auf die analogen Eigenschaften der erstern einen Schluss machen können.

§. 287. Eine unmittelbare Folge des Vorigen ist, dass, wenn in der einen Ebene ein Punkt X in einer Geraden x fortgeht, die dem X entsprechende Gerade x' in der andern Ebene sich um einen festen Punkt, um den der Geraden x entsprechenden X', bewegt. Wird aber vom erstern Punkte X irgend eine krumme Linie beschrieben, so werden sich je zwei nächstfolgende Lagen

der entsprechenden Geraden x' in einem immer andern Punkte X' schneiden, welcher umgekehrt dem Curvenelemente, oder vielmehr der Verlängerung x desselben, entspricht, das während dessen der Punkt X beschrieben hat; oder mit andern Worten: die Gerade x' bewegt sich als Tangente einer zweiten Curve, und ihr Berührungspunkt X' mit derselben entspricht der an die erste Curve in X gelegten Tangente x. Jeder Curve in der einen Ebene gehört also eine Curve in der andern, und jedem Punkte in der erstern Curve ein Punkt in der letztern zu, dergestalt, dass immer der eine Punkt der an den zugehörigen andern Punkt gelegten Tangente entspricht. Vergl. §. 284.

Um die Relation zwischen den Ausdrücken zweier sich auf solche Weise zugehörigen Curven zu finden, so seyen (mit Weglassung von $\alpha, \beta, \ldots \gamma'$)

$$\text{I. } pA + qB + rC, \quad \text{I*. } p_{\prime}A + q_{\prime}B + r_{\prime}C$$

zwei nächstfolgende Punkte der einen Curve, und daher

$$\text{II. } \frac{1-v}{p} A' - \frac{1}{q} B' + \frac{v}{r} C',$$

$$\text{II*. } \frac{1-w}{p_{\prime}} A' - \frac{1}{q_{\prime}} B' + \frac{w}{r_{\prime}} C'$$

die diesen Punkten entsprechenden, zwei nächstfolgenden Tangenten der andern Curve. Der gegenseitige Durchschnitt dieser Tangenten, also der dem Punkte I. in der ersten Curve zugehörige Punkt in der zweiten, sey

$$\text{III. } sA' + tB' + uC';$$

so hat man, weil III. sowohl in II. als in II*. liegen soll, die Gleichungen (vor. §.):

$$ps + qt + ru = 0, \quad p_{\prime}s + q_{\prime}t + r_{\prime}u = 0,$$

und daher $s : t : u = qr_{\prime} - q_{\prime}r : rp_{\prime} - r_{\prime}p : pq_{\prime} - p_{\prime}q$.

Denkt man sich nun p, q, r als Functionen einer Veränderlichen x, so ist:

$$p_{\prime}=p+\frac{dp}{dx}dx,\ q_{\prime}=q+\frac{dq}{dx}dx,\ r_{\prime}=r+\frac{dr}{dx}dx,$$

folglich $s:t:u=q\frac{dr}{dx}-r\frac{dq}{dx}$: etc. u. es wird hierdurch

$$\text{III.}\ \left(q\frac{dr}{dx}-r\frac{dq}{dx}\right)A'+\left(r\frac{dp}{dx}-p\frac{dr}{dx}\right)B'+\left(p\frac{dq}{dx}-q\frac{dp}{dx}\right)C',$$

welches daher zugleich den Ausdruck für die der Curve I. zugehörige Curve vorstellt.

Ist die Linie I. von der zweiten Ordnung, so hat man (§. 59.)

$$p=a+a'x+a''x^2,\quad q=b+b'x+b''x^2,\quad r=c+c'x+c''x^2,$$

folglich $\frac{dp}{dx}=a'+2a''x,\ \frac{dq}{dx}=b'+2b''x,\ \frac{dr}{dx}=c'+2c''x,$ —

wodurch, wie man leicht sieht, die Coëfficienten in III. ebenfalls von quadratischer Form werden. Die einem Kegelschnitte zugehörige Curve ist daher gleichfalls ein Kegelschnitt; d. h. liegen sechs oder mehrere Punkte in einem Kegelschnitte, so sind die ihnen entsprechenden Geraden Tangenten eines zweiten Kegelschnitts, und umgekehrt. Vergl. §. 284.

Anmerkung. Da die Curven I. und III. sich gegenseitig zugehören, so müssen eben so, wie aus den Coëfficienten in I. die Coëfficienten in III. entstehen, aus den letztern wieder die erstern zum Vorschein kommen; d. h., wenn man

$$1)\ \begin{cases} q\,dr-r\,dq=s\,dx \\ r\,dp-p\,dr=t\,dx \\ p\,dq-q\,dp=u\,dx \end{cases}$$

setzt, so müssen sich verhalten:

$$t\,du-u\,dt:u\,ds-s\,du:s\,dt-t\,ds=p:q:r.$$

Um dieses durch Rechnung zu zeigen, addire man die drei Gleichungen 1), nachdem man sie vorher resp. mit dp, dq, dr multiplicirt hat, und es kommt:

$$2)\quad s\,dp + t\,dq + u\,dr = 0.$$

Multiplicirt man ferner die Gleichungen 1) resp. mit p, q, r und addirt sie hierauf, so erhält man:

$$3)\quad ps + qt + ru = 0,$$

und wenn man vom Differential dieser Gleichung die Gleichung 2) abzieht:

$$4)\quad p\,ds + q\,dt + r\,du = 0.$$

Hieraus aber folgt in Verbindung mit 3) die zu erweisende Proportion.

§. 288. Wenn die Punkte und Geraden zweier Ebenen nach dem Gesetze, dass dreien Punkten in einer Geraden drei sich in einem Punkte schneidende Gerade entsprechen, auf einander bezogen werden sollen, so fragt es sich zunächst: wie viel Punkte in der einen und ihnen entsprechen sollende Gerade in der andern Ebene anfangs nach Willkühr genommen werden können. Die Antwort hierauf ergiebt sich schon aus dem Theorem des §. 285.

Denn nur dann erst, wenn vier Punkte in der einen Ebene eben so viel Geraden in der andern entsprechend gesetzt worden, ist es möglich, durch fortgesetzte Verbindung mit geraden Linien noch andere Paare sich entsprechender Punkte und Geraden zu finden. Man construire daher aus erstern vier Punkten ein geometrisches Netz und suche für die Punkte und Linien desselben nach der jetzigen Beziehungsart die entsprechenden Linien und Punkte in der andern Ebene *). Da nun, wenn drei

*) Werden den Punkten A, B, C, D
die Linien a, b, c, d
entsprechend gesetzt, so entsprechen ferner:
den Linien AB, AC, AD, BC, BD, CD
die Punkte ab, ac, ad, bc, bd, cd;
den Punkten $AB \cdot CD, AC \cdot BD, AD \cdot BC$
die Linien $ab - cd, ac - bd, ad - bc$;

Punkte eines Netzes in einer Geraden liegen, oder drei Gerade desselben sich in einem Punkte schneiden, dieses unabhängig von der gegenseitigen Lage der vier Hauptpunkte und folglich immer geschieht, wie auch die vier Hauptpunkte genommen werden mögen, — denn alle Netze sind einander collinear verwandt: so werden auch nach dem Satze in §. 285. die solchen drei Punkten (Geraden) entsprechenden Geraden (Punkte) sich in einem Punkte schneiden (in einer Geraden liegen). Da man ferner nach §. 205. durch fortgesetzte Verbindung von vier Punkten in einer Ebene zu jedem fünften Punkte der Ebene entweder vollkommen gelangen, oder doch demselben unendlich nahe kommen kann, so wird sich auf diese Weise für jeden Punkt oder Gerade der ersten Ebene die entsprechende Gerade oder Punkt in der zweiten finden lassen. Dasselbe wird man aber auch in der zweiten Ebene hinsichtlich der ersten vermögen, weil durch vier in einer Ebene beliebig gezogene Gerade nicht mehr, als vier von einander unabhängige Punkte bestimmt werden, und weil folglich die Figur, welche durch fortgesetzte Verbindung der Durchschnitte dieser Geraden entsteht, von einem aus vier Hauptpunkten abgeleiteten Netze nicht verschieden seyn kann. Also:

Nimmt man in einer Ebene vier Punkte, von denen keine drei in einer Geraden liegen, und setzt diesen vier in einer Ebene enthaltene Gerade entsprechend, von denen keine drei sich in einem Punkte schneiden, so lässt sich für jeden andern Punkt oder

den Linien $(AB \cdot CD) \dot{-} (AC \cdot BD)$, $(AB \cdot CD) - (AD \cdot BC)$, etc.
die Punkte $(ab \dot{-} cd) \cdot (ac - bd)$, $(ab - cd) \cdot (ad - bc)$, etc.
und so fort ohne Ende.

Gerade der einen Ebene eine entsprechende Gerade oder Punkt in der andern Ebene angeben, dergestalt, dass, wenn drei Punkte der einen Ebene in einer Geraden liegen, die ihnen entsprechenden drei Geraden sich in einem Punkte schneiden, und umgekehrt.

§. 289. Zusätze. *a.* Dasselbe Resultat kann auch leicht aus den Formeln in §. 286. abgeleitet werden. Setzt man nämlich $\alpha A + \beta B + \gamma C \equiv D$, so sind A, B, C, D vier von einander unabhängige Punkte, und eben so werden auch die ihnen entsprechenden Geraden von einander ganz unabhängig seyn. In der That geht der Ausdruck für X in den Punkt A über, wenn man χ und $\psi = 0$ setzt. Hierdurch verschwindet in dem Ausdrucke der entsprechenden Linie x' der Coëfficient von A' gegen die Coëfficienten von B' und C', und der Ausdruck stellt die Linie $B'C'$ dar. Dem Punkte A entspricht also die Linie $B'C'$, welche a heisse, und eben so den Punkten B, C die Linien $C'A'$, $A'B'$, welche man b, c nenne. Für $\varphi = \chi = \psi$ endlich erhält man den Punkt $\alpha A + \beta B + \gamma C \equiv D$ und die entsprechende Linie $(1-\nu)\ \alpha' A' - \beta' B' + \gamma' \nu C'$, welche d heisse. Da man nun die Punkte A', B', C' und die Coëfficienten α', β', γ' nach Belieben bestimmen kann, so bleiben auch die vier Linien a, b, c, d der Willkühr überlassen. Hat man aber diese vier Linien und jene vier Punkte bestimmt, so sind damit auch die Coëfficienten $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ festgesetzt, und es kann nun, den Formeln in §. 286. zufolge, jedem Punkte und jeder Geraden der einen Ebene nur eine bestimmte Gerade und ein bestimmter Punkt in der andern entsprechen.

b. Hat man aus den anfänglichen vier Punkten $A, .. D$ und den ihnen entsprechend gesetzten Geraden $a, .. d$ zu irgend vier andern Punkten I, K, L, M der einen

Ebene die ihnen entsprechenden Geraden i, k, l, m in der andern gefunden, so wird man durch fortgesetzte Verbindung der Punkte $I, .. M$ und der Durchschnitte der Geraden $i, .. m$ zu keinen andern Paaren sich entsprechender Punkte und Geraden gelangen, als die sich schon aus $A, .. D$ und $a, .. d$ erhalten lassen; oder mit andern Worten: jede vier Punkte der einen Ebene können als die anfänglichen vier Punkte, und die ihnen entsprechenden vier Geraden in der andern Ebene als die anfangs ihnen entsprechend gesetzten Geraden betrachtet werden.

§. 290. Wenn die Punkte zweier Ebenen nach dem Gesetze der Collineationsverwandtschaft auf einander bezogen werden, so ist jedes D.verhältniss in der einen Ebene dem aus den entsprechenden Punkten der andern Ebene gebildeten D.verhältnisse gleich (§. 221. 2.). Der unverkennbare genaue Zusammenhang zwischen der Collineationsverwandtschaft und der Art und Weise, nach welcher wir gegenwärtig die Punkte und Geraden zweier Ebenen auf einander beziehen, berechtigt uns zu der Erwartung, dass auch bei letzterer Art eine solche Gleichheit der D.verhältnisse anzutreffen seyn werde.

Ein D.verhältniss wird durch vier in einer Geraden liegende Punkte gebildet, denen gegenwärtig vier in einem Punkte sich schneidende Gerade entsprechen. Da nun durch vier solche Gerade jede fünfte Gerade nach einem und demselben D.verhältnisse getheilt wird, so werden wir zu untersuchen haben, ob dieses letztere, durch vier sich in einem Punkte treffende Gerade bestimmte, D.verhältniss mit dem von den erstgedachten vier Punkten gebildeten von gleichem Werthe ist.

Nach §. 286. entspricht dem Punkte

$$\varphi\alpha A + \chi\beta B + \psi\gamma C$$

die Gerade $\frac{1-\nu}{\varphi}\alpha'A' - \frac{1}{\chi}\beta'B' + \frac{\nu}{\psi}\gamma'C'$,

oder, wenn man statt ν eine andere Veränderliche x einführt, so dass $\nu = \psi x$ ist,

die Gerade $\frac{1-\psi x}{\varphi}\alpha'A' - \frac{1}{\chi}\beta'B' + x\gamma'C'$.

Setzt man nun $\psi = 0$, so entspricht dem Punkte $\varphi\alpha A + \chi\beta B$ die Gerade $\frac{1}{\varphi}\alpha'A' - \frac{1}{\chi}\beta'B' + x\gamma'C'$ oder $\chi\alpha'A' - \varphi\beta'B' + y C'$, wo $y = \varphi\chi\gamma' x$, mithin auch dem Punkte $\alpha A + \beta B$ die Gerade $\alpha'A' - \beta'B' + yC'$ für $\varphi = \chi$, und, wie schon in §. 289. *a.* bemerkt worden, den Punkten A, B die Geraden $B'C'$, $A'C'$, wenn man resp. $\chi = 0$, $\varphi = 0$ nimmt.

Man setze demnach (Fig. 74.):

$$\alpha A + \beta B \equiv F,\quad \alpha'A' - \beta'B' \equiv F',$$
$$\varphi\alpha A + \chi\beta B \equiv G,\quad \chi\alpha'A' - \varphi\beta'B' \equiv G',$$

so entsprechen den vier in einer Geraden liegenden Punkten A, B, F, G die vier in einem Punkte zusammenkommenden Geraden $B'C'$, $A'C'$, $F'C'$, $G'C'$, welche von einer fünften Geraden $A'B'$ in den Punkten B', A', F', G' geschnitten werden. Aus den Ausdrücken für F, G, F', G' folgt aber die erwartete Gleichheit der D.verhältnisse:

$$(A, B, F, G) = (B', A', F', G') = \varphi : \chi.$$

Bei dem ersten derselben sind A und B zwei der vier anfänglichen Punkte $A, .. D$ selbst, F der Durchschnitt von AB mit CD, G ein beliebiger anderer Punkt in AB, und mithin die vier in einer Geraden liegenden Punkte $A, .. G$ von einander ganz unabhängig. Auf ähnliche Art sind die vier sich in einem Punkte schneidenden Geraden $B'C', .. G'C'$, deren Durchschnitte mit einer fünften Geraden die vier Punkte des zweiten D.ver-

hältnisses abgeben, mit den vier anfänglichen Geraden $a, .. d$ zum Theil identisch und zum Theil durch sie bestimmt, von einander selbst aber unabhängig. Da nun (§. 289. *b.*) auch je vier andere Punkte und die ihnen entsprechenden Geraden zu den anfänglichen Punkten und Geraden genommen werden können, so muss jene Gleichheit der D.verhältnisse ganz allgemein statt finden, und wir haben daher folgenden Satz:

Werden die Punkte und Geraden zweier Ebenen dergestalt auf einander bezogen, dass je dreien Punkten der einen Ebene, welche in einer Geraden liegen, in der andern Ebene drei sich in einem Punkte schneidende Gerade entsprechen, so ist jedes Doppelschnittsverhältniss der einen Ebene gleich dem D.verhältnisse, nach welchem in der andern die den vier Punkten des erstern entsprechenden vier Geraden von jeder fünften Geraden geschnitten werden.

§. 291. Was jetzt von der Gleichheit der D.verhältnisse gezeigt wurde, wollen wir nunmehr auf die Vieleckschnittsverhältnisse auszudehnen suchen. Hierzu ist folgender Satz vorauszuschicken nöthig.

Werden die drei Spitzen eines Dreiecks PQR (Fig. 75.) mit einem vierten in der Ebene desselben liegenden Punkte S durch Gerade verbunden, und wird eine beliebige andere Gerade der Ebene von den Seiten des Dreiecks QR, RP, PQ in X, Y, Z und von jenen drei Geraden PS, QS, RS in X′, Y′, Z′ geschnitten, so ist immer das Dreieckschn.verhältniss

$$(YX' : X'Z)\,(ZY' : Y'X)\,(XZ' : Z'Y) = -1.$$

Beweis. Man setze $RP \cdot QS \equiv Q'$. Alsdann schnei-

den sich $Q'Y$, QZ, SX' in einem Punkte P, und es ist folglich (§. 188.):

$$(Q', Q, S, Y') = (Y, Z, X', Y'),$$

und eben so $(Q', Q, Y', S) = (Y, X, Y', Z')$,

weil $Q'Y$, QX, SZ' sich in einem Punkte R treffen. Multiplicirt man diese zwei Gleichungen in einander, so kommt (§. 184. II.):

$$1 = (Y, Z, X', Y')\,(Y, X, Y', Z')$$

$$= \frac{YX'}{X'Z} \cdot \frac{ZY'}{Y'Y} \cdot \frac{YY'}{Y'X} \cdot \frac{XZ'}{Z'Y}$$

$$= -(YX' : X'Z)\,(ZY' : Y'X)\,(XZ' : Z'Y),$$

wie zu erweisen war.

§. 292. So wie bei diesem und dem vorigen Satze, so werden wir es auch in dem Folgenden mit einem Systeme gerader Linien zu thun haben, welche alle von einer andern, nach Belieben zu ziehenden Geraden geschnitten werden. Der Kürze willen sollen dabei durch die für jene Linien gewählten Buchstaben zugleich auch die Durchschnitte derselben mit der willkührlichen Geraden ausgedrückt werden, — auf analoge Art, wie bei den barycentrischen Formeln die Uncialbuchstaben nicht blosse Punkte, sondern Abschnitte paralleler Geraden mit einer willkührlich zu legenden Ebene bezeichnen. — Die Sätze der beiden vorigen §§. lassen sich hiernach kurz so darstellen:

1) Sind A, B, F, G vier in einer Geraden liegende Punkte und a, b, f, g die ihnen entsprechenden Geraden, welche sich daher in einem Punkte schneiden, so ist:

$$\text{I.} \quad (A, B, F, G) = (a, b, f, g).$$

2) Sind p, q, r drei Gerade in einer Ebene, und werden in derselben Ebene durch die Durchschnitte von q

und r, von r und p, von p und q resp. die Geraden p', q', r' gelegt, welche sich in einem Punkte schneiden, so ist:

II. $(qp':p'r)(rq':q'p)(pr':r'q) = -1$.

§. 293. Seyen nun, um zu den Dreieckschnittsverhältnissen überzugehen, D, E, F (Fig. 76.) die Schneidepunkte der Seiten BC,.. des Dreiecks ABC, also das Dr.verhältniss selbst:

$$(BD:DC)(CE:EA)(AF:FB) = \Delta.$$

Die den Punkten $A,\ldots F$ entsprechenden Geraden heissen $a,\ldots f$, von denen daher b, c, d; c, a, e; a, b, f, je drei besonders, sich in einem Punkte schneiden. Man setze $AB \cdot DE \equiv G$, so entspricht diesem Punkte die Linie $ab \frown de$, welche g heisse, und man hat (§. 198. 2.):

$$(BD:DC)(CE:EA)(AG:GB) = -1.$$

Hierdurch wird $\Delta = -(AF:FB)(BG:GA) = -(A, B, F, G)$
$= -(a, b, f, g)$ (vor. §. I.) $= -(af:fb)(bg:ga)$.

Es ist ferner nach II., weil d, e, g sich in einem Punkte schneiden und resp. durch die Durchschnitte von b mit c, c mit a, a mit b gehen:

$$(bd:dc)(ce:ea)(ag:gb) = -1.$$

Hierdurch reducirt sich der letzterhaltene Ausdruck für Δ auf:

$$\Delta = (bd:dc)(ce:ea)(af:fb),$$

der, wie man sieht, eben so aus $a,\ldots f$ zusammengesetzt ist, als es der anfängliche aus $A,\ldots F$ war. — Man kann dieses Resultat folgendergestalt in Worte fassen:

Hat man in einer Ebene drei gerade Linien a, b, c, *und drei andere Gerade* d, e, f, *welche durch die gegenseitigen Durchschnitte der drei erstern gehen,* d *durch den Schneidepunkt von* b *mit* c, *etc: so ist das Dreieckschnittsverhältniss, nach welchem in einer*

noch andern Geraden z, die zwischen b und c, zwischen c und a, zwischen a und b enthaltenen Theile derselben, resp. von d, e, f geschnitten werden, für jede Lage von z von derselben Grösse. — Es ist nämlich dieses Dr.verhältniss gleich dem Dr.verhältnisse, nach welchem die Seiten BC,.. eines Dreiecks ABC resp. in D, E, F getheilt werden, wenn $A, \ldots F$ die den Linien $a, \ldots f$ entsprechenden Punkte sind.

In dem besondern Falle, wo d, e, f sich in einem Punkte schneiden, und daher D, E, F in einer Geraden liegen, wird das letztere Dr.verhältniss und folglich auch das erstere $= -1$; und man kommt somit auf den Satz des §. 291. zurück.

§. 294. Seyen jetzt E, F, G, H (Fig. 77.) die Schneidepunkte der Seiten $AB, .. DA$ eines ebenen Vierecks $ABCD$, und die diesen acht Punkten entsprechenden Linien: $a, \ldots h$, von denen daher a, b, e; b, c, f; c, d, g; d, a, h, je drei besonders, in einem Punkte sich treffen. Man setze $AB \cdot CD \equiv I$ und eben so $ab \frown cd \equiv i$; alsdann ist, nach dem vorigen Satze, für das Dreieck DAI mit den Schneidepunkten E, G, H:

$$(AE:EI)\,(IG:GD)\,(DH:HA) = (ae:ei)\,(ig:gd)\,(dh:ha),$$

und für das Dreieck CIB mit den Schneidepunkten E, F, G:

$$(IE:EB)\,(BF:FC)\,(CG:GI) = (ie:eb)\,(bf:fc)\,(cg:gi);$$

und wenn man diese Gleichungen mit einander multiplicirt:

$$(AE:EB)\,(BF:FC)\,(CG:GD)\,(DH:HA)$$
$$= (ae:eb)\,(bf:fc)\,(cg:gd)\,(dh:ha),$$

eine Relation, welche der vorhin für die Dr.verhältnisse gefundenen vollkommen analog ist. Auf eben die Art wird man nun weiter vom Viereck- zum Fünfeckschnitts-

verhältnisse und so fort übergehen können, und damit folgenden allgemeinen Satz erhalten:

Heissen a, b, c, ... die Seiten eines ebenen Vielecks, und m, n, o, ... die Seiten eines um dasselbe beschriebenen Vielecks, so dass a und b in m, b und c in n, etc. sich schneiden. Wird nun in der Ebene eine beliebige andere Gerade z gezogen, so ist das Vlckschn.verhältniss, nach welchem die von je zwei auf einander folgenden Seiten des erstern Vielecks, a und b, b und c, etc. in der Linie z abgeschnittenen Theile durch die Seiten des letztern Vielecks, m, n, ... resp. getheilt werden, für jede Lage von z von einerlei Grösse. — Es ist nämlich dem Vl.verhältnisse (*AM*:*MB*) (*BN*:*NC*) ... gleich, nach welchem die Seiten des Vielecks *ABC*... von den Spitzen des in dasselbe beschriebenen Vielecks *MNO*... getheilt werden, wenn *A*, *B*, .. *M*, *N*, .. die den Geraden *a*, *b*, .. *m*, *n*, .. entsprechenden Punkte sind. Oder:

Werden die Punkte und Geraden zweier Ebenen dergestalt auf einander bezogen, dass je drei Punkten in einer Geraden der einen Ebene drei sich in einem Punkte schneidende Gerade in der andern Ebene entsprechen, so ist jedes Vl.verhältniss in der einen gleich dem Vl.verhältnisse in der andern, welches entsteht, wenn man für die Punkte, wodurch das erstere Vl.verhältniss bestimmt wird, in der andern Ebene die Punkte nimmt, in denen eine beliebig darin gezogene Gerade von den, den erstern Punkten entsprechenden, Geraden geschnitten wird.

§. 295. Zusatz. Wenn man von der somit erhaltenen Figur in der zweiten Ebene die entsprechende Fi-

gur in der ersten Ebene nachsucht, so bekommt man wieder die anfänglichen Punkte und Geraden, ausserdem aber an der Stelle der willkührlich zu ziehenden Geraden und ihrer Durchschnittspunkte einen beliebig zu nehmenden Punkt und die Linien, welche diesen Punkt mit den Spitzen und Schneidepunkten des Vielecks verbinden. Die Durchschnitte dieser Linien in der ersten Ebene mit einer beliebig darin gezogenen Geraden müssen aber nach vorigem Satze wiederum ein Vl.verhältniss bestimmen, welches dem Vl.verhältnisse in der willkührlichen Geraden der zweiten Ebene, also dem ursprünglichen Vl.verhältnisse in der ersten Ebene gleich ist. Wir schliessen hieraus:

Der Werth eines Vl.verhältnisses bleibt ungeändert, wenn man für die Punkte, wodurch es bestimmt wird, die Projectionen dieser Punkte auf eine beliebig gezogene Gerade aus einem beliebig genommenen Punkte substituirt.

Sind z. B. D, E, F die Schneidepunkte der Seiten $BC, ..$ des Dreiecks ABC, Z ein beliebiger Punkt in der Dreiecksebene, z eine willkührlich darin gezogene Gerade, und nennt man die Durchschnitte von $ZA, ZB, \ldots ZF$ mit z resp. $A', B', \ldots F'$, so ist:

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{B'D'}{D'C'} \cdot \frac{C'E'}{E'A'} \cdot \frac{A'F'}{F'B'}.$$

Eine leichte Folgerung aus diesem Satze ist:

Wenn die Spitzen und Schneidepunkte zweier Vielecke von gleich vielen Seiten in einer Ebene sich solchergestalt entsprechen, dass alle die Geraden, welche je zwei sich entsprechende Punkte verbinden, in einem Punkte sich schneiden, so haben die Vl.verhältnisse beider Vielecke gleiche Werthe.

Dass dieser Satz auch dann gilt, wenn die beiden Vielecke in zwei verschiedenen Ebenen liegen, erhellet schon aus §. 230. zu Anfang.

§. 296. Bei jeder Figur, welche durch geradlinige Verbindung mehrerer in einer Ebene nach Willkühr genommener Punkte entsteht, finden zwischen den dadurch sich bildenden Vl.verhältnissen gewisse Relationen statt, Relationen also, welche dieselben bleiben, wie auch die gegenseitige Lage der anfangs genommenen Punkte geändert werden mag. Construirt man nun eine zweite Figur, deren Punkte und Gerade den Geraden und Punkten der ersten auf die im Satze des §. 294. angezeigte Weise entsprechen, in welcher daher alle Vl.verhältnisse der ersten auf analoge Weise und in derselben Grösse sich wieder zeigen, und wo folglich auch die vorhin bemerkten Relationen zwischen den entsprechenden Vl.verhältnissen statt finden müssen: so wird jene willkührliche Veränderung der anfänglichen Punkte in der ersten Figur eine willkührliche Veränderung in der Lage der ihnen entsprechenden Geraden in der zweiten zur Folge haben; nichts desto weniger aber werden auch hier die Relationen zwischen den entsprechenden Vl.verhältnissen fortbestehen müssen. Dies giebt uns folgendes fruchtbare Theorem:

Wenn bei einer geradlinigen ebenen Figur aus der Art, wie die Linien derselben in Punkten zusammenlaufen, gewisse Relationen zwischen Vl.verhältnissen gefolgert worden sind; und wenn man hierauf eine zweite Figur construirt, indem man die Punkte der erstern mit Geraden und umgekehrt vertauscht: so werden dieselben Relationen auch zwischen den Vl.verhältnissen der zwei-

ten Figur anzutreffen seyn, welche hierin von den, den Punkten der ersten entsprechenden, Linien in einer beliebig gezogenen Geraden gebildet werden.

§. 297. Beispiele. 1) Der Satz in §. 291. ist der analoge von §. 198. 2).

2) Sind A, B, C, D vier Punkte in einer Ebene, und setzt man $AD \cdot BC \equiv A'$, $BD \cdot CA \equiv B'$, $CD \cdot AB \equiv C'$, so ist

$$(BA' : A'C)\,(CB' : B'A)\,(AC' : C'B) = 1 \text{ (§. 198. 1.)}$$

Sind daher a, b, c, d vier gerade Linien in einer Ebene, und setzt man $ad \frown bc \equiv a'$, $bd \frown ca \equiv b'$, $cd \frown ab \equiv c'$, so muss gleichfalls seyn:

$$(ba' : a'c)\,(cb' : b'a)\,(ac' : c'b) = 1,$$

oder allgemein verständlich (Fig. 78.):

Wird um ein Dreieck ABC ein anderes $A'B'C'$ so beschrieben, dass die Durchschnitte D, E, F der gleichnamigen Seiten in einer Geraden liegen, (also auch die drei Geraden, welche die gleichnamigen Spitzen verbinden, in einem Punkte sich schneiden,) und wird eine beliebig gezogene Gerade von den Seiten der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ resp. in a, b, c und a', b', c' getroffen; so ist:

$$(ba' : a'c)\,(cb' : b'a)\,(ac' : c'b) = 1.$$

3) Heissen $a, b, c, d, \ldots$ die Seiten eines ebenen Vielecks, und $m, n, o, \ldots$ die Geraden, welche die Spitzen $ab, bc, cd, \ldots$ mit einem beliebigen Punkte Z in der Ebene des Vielecks verbinden, so ist das Vl.verhältniss

$$(am : mb)\,(bn : nc)\,(co : od) \ldots = \pm 1,$$

nachdem die Seitenzahl des Vielecks gerade oder ungerade ist; der analoge Satz von §. 199. *c.*

Hat man ein Viereck, und nimmt für Z den Durchschnitt der Diagonalen, so kommt:

$$(am:mb)(bn:nc)(cm:md)(dn:na)=1,$$

oder

$$(m,n,a,b)=(m,n,d,c),$$

wo m und n die beiden Diagonalen ab — cd und bc — da sind; also:

Hat man in einer Ebene ein Viereck und eine beliebig gezogene Gerade, so wird der von den zwei Diagonalen des Vierecks abgeschnittene Theil der Geraden von der ersten und zweiten und von der vierten und dritten Seite des Vierecks nach gleichen D.-verhältnissen getheilt.

§. 298. So wie also bei einer geradlinigen ebenen Figur für jeden Satz, welcher allein das Liegen der Punkte in Geraden und das Schneiden der Geraden in Punkten betrifft, durch Verwandlung der Punkte in Gerade, und umgekehrt, ein analoger Satz gefunden werden kann (§. 285.), so gilt dasselbe auch für die Relationen zwischen den D.- und Vl.verhältnissen einer solchen Figur, also überhaupt für jede Eigenschaft, welche sich mittelst des abgekürzten barycentrischen Calculs ableiten lässt (§. 235.), d. h. für jede Eigenschaft der dritten Classe (§. 248.). Jeder Satz also, welcher eine Eigenschaft der dritten Classe darstellt, hat das Besondere, dass ihm ein analoger Satz zur Seite steht, den man durch gegenseitiges Vertauschen von Punkten und Geraden erhält, oder mit andern Worten:

Alle zur dritten Classe gehörigen Eigenschaften geradliniger ebener Figuren können in Paaren zusammengeordnet werden, dergestalt, dass von den zwei zu je einem Paare gehörigen Eigenschaften die eine aus der

andern durch gegenseitiges Vertauschen von Punkten mit Geraden entspringt.

Anmerkung. Die jetzt vorgetragenen Lehren über Systeme von Punkten und Geraden in Ebenen lassen sich nun auch auf Systeme von Punkten, Geraden und Ebenen im Raume ausdehnen. Um aber die Grenzen dieser Schrift nicht zu überschreiten, so bemerke ich nur, dass bei räumlichen Figuren jedem Punkte eine Ebene entsprechend zu setzen ist, dass mithin der Geraden, welche zwei Punkte verbindet, die Durchschnittslinie der entsprechenden Ebenen entspricht, dass, wenn drei Punkte in einer Geraden, oder vier Punkte in einer Ebene enthalten sind, die diesen Punkten entsprechenden Ebenen im ersten Falle in einer Geraden, im zweiten in einem Punkte sich schneiden müssen, und dass endlich auch hier alle Eigenschaften der dritten Classe paarweise vorhanden sind.

Der noch übrige Raum dieses Bogens veranlasst mich, eine sich mir noch darbietende Bemerkung hinzuzufügen, dass nämlich alle D.- und VI.verhältnisse, welche auf die in diesem Capitel gezeigte Art durch die Punkte bestimmt werden, in welchen von gewissen Geraden eine beliebige andere Gerade geschnitten wird, sich auch bloss als Functionen der Winkel darstellen lassen, die jene erstern Geraden mit einander bilden.

Denn seyen, um dies nur bei D.verhältnissen zu zeigen, a, b, c, d vier in einer Ebene liegende und sich in einem Punkte schneidende Gerade, und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Winkel dieser Geraden mit irgend einer andern Geraden der Ebene, so ist das D.verhältniss

$$(a, d, b, c) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\beta-\delta)} : \frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\sin(\gamma-\delta)}.$$

Sind die drei Winkel, welche a mit b, b mit c, c mit d machen, einander gleich, jeder derselben $= \mu$, so wird

$$(a, d, b, c) = \frac{\sin\mu}{\sin 2\mu} : \frac{\sin 2\mu}{\sin\mu} = \tfrac{1}{4}\sec\mu^2.$$

Sind z. B. a, b, c, d vier auf einander folgende Stundenlinien einer Aequinoctial-Sonnenuhr, (deren Ebene parallel mit dem Aequator ist,) so ist $\mu = 15^\circ$ und daher

$$(a, d, b, c) = \tfrac{1}{4}(\sec 15^\circ)^2.$$


Man bemerke dabei, dass dieselbe Gleichung auch für eine auf irgend einer andern Ebene construirte Sonnenuhr gelten muss, weil jede andere Sonnenuhr, wenn man das Auge an den mit der Weltaxe parallelen Zeiger bringt, sich als perspectivisches Bild der Aequinoctialuhr darstellt. Werden daher vier auf einander folgende Stundenlinien einer Sonnenuhr von einer beliebig gezogenen Geraden in den Punkten A, B, C, D geschnitten, so ist immer:

$$\frac{AB}{BD} : \frac{AC}{CD} = \tfrac{1}{4}(\sec 15)^2.$$

Druckfehler und Verbesserungen.

Seite	xiv	Zeile	4 v. o.	statt dass lies das.
—	30	—	11 v. u.	lies: *CDE*, *AC* und *BDE*,
—	69	—	9 v. u.	vertilge selbst hinter Linie.
—	74	—	15 v. o.	statt xC lies x^2C.
—	76	—	14 v. u.	nach unten setze (§. 130. 1.).
—	140	—	9 v. u.	statt: Von Flächen lies: Von den Flächen.
—	—	—	1 v. u.	hinter Capitel setze (§. 134. 1.).
—	207	—	9 v. u.	lies: Systems, so wie auch die Verhältnisse zwischen den von diesen Geraden begrenzten Figuren gefunden werden.
—	230	—	3 v. u.	nach Folge setze (§. 262.).
—	241	—	17 v. o.	statt C lies C'.
—	249	—	5 v. u.	statt erstern lies letztern.
—	—	—	4 v. u.	statt letztern lies erstern.
—	255	—	9 v. o.	statt $D'E'$, lies D', E'.
—	289	—	14 v. o.	lies: $c'C' = cC + eE$,
—	297	—	4 v. u.	statt $\equiv$ setze $=$.
—	313	—	11 v. o.	statt entfernten lies Collineations.

I.


4.
A
AB
CA
ABC
B
X
C
BC
8.
9.
11.
12.
19.
D
E'
D'
E
C
E''
D''
C'
C'''
A
B'
B
III
II
I
III*
II*
I*
f
d'
b''
e

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Möbius, August Ferdinand,

Der barycentrische Calcul ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie ; dargestellt und insbesondere auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und die Entwickelung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte angewendet

Leipzig 1827

Math.p. 361 m
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082429-2